고등학교
입 문 서
NO. 1

# 고등 예비 과정

## 공통수학

정답과 풀이

# 정답과 풀이

## 01 다항식의 연산

**유제** 본문 8~12쪽

**1.** $3x^2-xy+2y^2$ **2.** $x^2-4x+8$
**3.** $6x^3+3x^2+9x-6$ **4.** $2x^3-6x-4$
**5.** (1) $4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4zx$
(2) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$ (3) $x^3-27y^3$
**6.** (1) $x^2+y^2-2xy+2x-2y+1$ (2) $x^3+6x^2+12x+8$
(3) $x^3-1$
**7.** $-3$ **8.** $2$ **9.** 풀이 참조
**10.** 풀이 참조

**1** $2A-(A-B)=2A-A+B=A+B$
$=(x^2-2xy+3y^2)+(2x^2+xy-y^2)$
$=(1+2)x^2+(-2+1)xy+(3-1)y^2$
$=3x^2-xy+2y^2$

답 $3x^2-xy+2y^2$

**2** $(A+B)-(2A-C)$
$=A+B-2A+C$
$=-A+B+C$
$=(A+B+C)-2A$
$=(3x^2-2x+4)-2(x^2+x-2)$
$=(3x^2-2x+4)+(-2x^2-2x+4)$
$=(3-2)x^2+(-2-2)x+(4+4)$
$=x^2-4x+8$

답 $x^2-4x+8$

**3** $B(A+B)+(2A-B)B$
$=AB+B^2+2AB-B^2=3AB$
$=3(2x-1)(x^2+x+2)$
$=6x(x^2+x+2)-3(x^2+x+2)$
$=(6x^3+6x^2+12x)-(3x^2+3x+6)$
$=6x^3+3x^2+9x-6$

답 $6x^3+3x^2+9x-6$

**4** $AB(B+C)-B(AB-AC)$
$=AB^2+ABC-AB^2+ABC=2ABC$
$=2(x+1)(x^2-x-2)$
$=2x(x^2-x-2)+2(x^2-x-2)$
$=(2x^3-2x^2-4x)+(2x^2-2x-4)$
$=2x^3-6x-4$

답 $2x^3-6x-4$

**5** (1) $(2x+y-z)^2$
$=(2x)^2+y^2+(-z)^2+2(2x)y+2y(-z)$
$+2(-z)(2x)$
$=4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4zx$
(2) $(x-3y)^3=x^3-3x^2(3y)+3x(3y)^2-(3y)^3$
$=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$
(3) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)=x^3-(3y)^3$
$=x^3-27y^3$

답 (1) $4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4zx$
(2) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$ (3) $x^3-27y^3$

**6** (1) $(x-y+1)^2$
$=x^2+(-y)^2+1^2+2x(-y)$
$+2(-y)\times1+2\times1\times x$
$=x^2+y^2-2xy+2x-2y+1$
(2) $(x+2)^3=x^3+3x^2\times2+3x\times2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$
(3) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1^3$
$=x^3-1$

답 (1) $x^2+y^2-2xy+2x-2y+1$
(2) $x^3+6x^2+12x+8$ (3) $x^3-1$

**7** $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서
$2(xy+yz+xz)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$
$=2^2-10=-6$
따라서 $xy+yz+zx=-3$

답 $-3$

**8** $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$7=1^3+3xy\times1,\ 3xy=6$
따라서 $xy=2$

답 2

**9**

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x-2 \\ \cline{2-2}
x^2+1 & x^3-2x^2+4x-1 \\
 & x^3 \qquad\;\; +x \\ \cline{2-2}
 & \;\; -2x^2+3x-1 \\
 & \;\; -2x^2 \qquad -2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x+1
\end{array}$$

따라서 몫은 $x-2$, 나머지는 $3x+1$이므로

$x^3-2x^2+4x-1=(x^2+1)(x-2)+3x+1$

답 풀이 참조

**10**

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 4x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+x+1 & 4x^3+3x^2 \qquad -2 \\
 & 4x^3+4x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -x^2-4x-2 \\
 & \qquad -x^2 \;\, -x-1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -3x-1
\end{array}$$

따라서 몫은 $4x-1$, 나머지는 $-3x-1$이므로

$4x^3+3x^2-2=(x^2+x+1)(4x-1)-3x-1$

답 풀이 참조

## 기본 핵심 문제

본문 13쪽

**01** ② **02** ② **03** ① **04** ⑤ **05** ④

**01** $X+A=-X+B$에서

$2X=B-A=(3x^2+4xy-3y^2)-(x^2-2xy+y^2)$

$\quad\;\;=2x^2+6xy-4y^2$

따라서 $X=\frac{1}{2}(2x^2+6xy-4y^2)=x^2+3xy-2y^2$

답 ②

**02** $x^2$항은 $x^2$항과 상수항 또는 $x$항과 $x$항의 곱으로 만들어진다.

그러므로 $(x^2+kx+1)(x^2-3x+4)$에서 $x^2$항은

$x^2\times4+1\times x^2+kx\times(-3x)=(5-3k)x^2$

$x^2$의 계수가 8이므로 $5-3k=8$

따라서 $k=-1$

답 ②

**03** $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

$=3-2=1$

답 ①

**04** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$에서 $\frac{x+y}{xy}=2$

$xy=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}\times4=2$

따라서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\qquad\;\;=4^3-3\times2\times4$

$\qquad\;\;=40$

답 ⑤

**05** 다항식 $x^4+2x^2-3$을 다항식 $X$로 나누었을 때의 몫이 $x^2-x+2$이고 나머지가 $-x-5$이므로

$x^4+2x^2-3=X(x^2-x+2)-x-5$

$x^4+2x^2+x+2=X(x^2-x+2)$

즉, $x^4+2x^2+x+2$는 $x^2-x+2$로 나누어떨어진다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x^2-x+2 & x^4 \qquad +2x^2+\; x+2 \\
 & x^4-x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad\; x^3 \qquad\;\; +x+2 \\
 & \quad\; x^3\; -x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad\; x^2 \;\, -x+2 \\
 & \qquad\quad\; x^2 \;\, -x+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

따라서 $X=x^2+x+1$

답 ④

# 02 나머지정리

## 유제

본문 14~18쪽

**1.** (1) 항등식 (2) 항등식이 아니다.
**2.** 항등식이 아니다. **3.** $a=2$, $b=-7$, $c=-4$
**4.** $a=2$, $b=3$, $c=2$ **5.** $\frac{5}{2}$ **6.** 2 **7.** 3
**8.** $a=-1$, $b=-1$ **9.** 풀이 참조 **10.** 풀이 참조

**1** (1) $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$의 우변을 정리하면

$x^2-4x-5=x^2-4x-5$

위 등식의 양변의 각 항의 계수와 상수항이 각각 같으므로 항등식이다.

(2) $x^2-9=(x-3)^2$의 우변을 정리하면

$x^2-9=x^2-6x+9$

위 등식의 양변의 일차항의 계수와 상수항이 각각 다르므로 항등식이 아니다.

답 (1) 항등식 (2) 항등식이 아니다.

**2** $(x+1)(x+2)=x(x+2)+2$의 양변을 정리하면

$x^2+3x+2=x^2+2x+2$

위 등식의 양변의 일차항의 계수가 다르므로 항등식이 아니다.

답 항등식이 아니다.

**3** $(2x+1)(x-4)=ax^2+bx+c$의 좌변을 정리하면

$2x^2-7x-4=ax^2+bx+c$

따라서 $a=2$, $b=-7$, $c=-4$

답 $a=2$, $b=-7$, $c=-4$

**4** $a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-x+1$의 좌변을 정리하면

$ax^2+(-2a+b)x+a-b+c=2x^2-x+1$

그러므로 $a=2$

$-2a+b=-1$에서 $a=2$이므로 $b=3$

$a-b+c=1$에서 $a=2$, $b=3$이므로 $c=2$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=2$

답 $a=2$, $b=3$, $c=2$

**5** 다항식 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 구하는 나머지는

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+2$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

**6** 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(1)$이다.

그러므로

$P(1)=1^2+a+3=4+a=6$

따라서 $a=2$

답 2

**7** 다항식 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지면 $P(1)=0$이다.

그러므로

$P(1)=1^3+1^2-a\times1+1=3-a=0$

따라서 $a=3$

답 3

**8** 다항식 $P(x)$가 $x+1$, $x-1$을 인수로 가지므로 $P(-1)=0$, $P(1)=0$이다.

그러므로

$$P(-1)=(-1)^3+a\times(-1)^2+b\times(-1)+1$$
$$=a-b=0$$

$a=b$ …… ㉠

$P(1)=1^3+a\times1^2+b\times1+1=a+b+2=0$

$a+b=-2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

답 $a=-1$, $b=-1$

**9**

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ & & -4 & 8 & -14 \\ \hline & 2 & -4 & 7 & \boxed{-9} \end{array}$$

위와 같이 조립제법을 이용하면

몫은 $2x^2-4x+7$, 나머지는 $-9$이다.

답 풀이 참조

**10** 다항식 $4x^3-x+2$를 일차식 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 생각해 보자.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & -1 & 2 \\ & & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 4 & 2 & 0 & \boxed{2} \end{array}$$

위와 같이 조립제법을 이용하면 몫은 $4x^2+2x$, 나머지는 2이다.

그러므로

$$4x^3-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x)+2$$
$$=(2x-1)(2x^2+x)+2$$

따라서 다항식 $4x^3-x+2$를 일차식 $2x-1$로 나눈 몫은 $2x^2+x$, 나머지는 2이다.

답 풀이 참조

## 기본 핵심 문제 
본문 19쪽

**01** ③ **02** ② **03** ① **04** ② **05** ⑤

**01** $(2x-1)(x+1)+3x-1=P(x)+2x$에서

$P(x)=(2x-1)(x+1)+3x-1-2x$
$=2x^2+x-1+x-1$
$=2x^2+2x-2$

위 등식이 $x$에 대한 항등식이므로 다항식 $P(x)$는 $2x^2+2x-2$이다.

답 ③

**02** $(ax^2-x+1)(x+b)=2x^3-7x^2+4x-3$의 좌변을 정리하면

$ax^3+(ab-1)x^2+(1-b)x+b=2x^3-7x^2+4x-3$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a+b=2+(-3)=-1$

답 ②

|참고|

$(ax^2-x+1)(x+b)=2x^3-7x^2+4x-3$

에서 좌변의 삼차항의 계수는 $a$, 상수항은 $b$이므로

$a=2$, $b=-3$

임을 쉽게 구할 수 있다.

**03** 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$P(-1)=2$ …… ㉠

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 $-1$이므로

$P(2)=-1$ …… ㉡

한편, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이고 $P(x)$를 이차식 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

이때 ㉠, ㉡에서

$P(-1)=-a+b=2$

$P(2)=2a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

따라서 $R(x)=-x+1$이므로

$R(1)=-1+1=0$

답 ①

**04** $P(x)=x^3+kx^2-k^2x-2$라 할 때, $P(x)$가 $x-2$를 인수로 갖기 위해서는 $P(2)=0$이다.

그러므로

$P(2)=2^3+k\times2^2-k^2\times2-2=0$

$k^2-2k-3=0$, $(k-3)(k+1)=0$

$k=3$ 또는 $k=-1$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은 $3+(-1)=2$

답 ②

**05** $P(x)=x^3+ax^2+4x-2$라 하면 나머지정리에 의해 $P(1)=2$이다. 그러므로

$P(1)=1^3+a\times1^2+4\times1-2=a+3=2$

$a=-1$

다음과 같이 조립제법을 이용하면 몫은 $x^2+4$이므로

$b=0$, $c=4$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{2} \end{array}$$

따라서 $a+b+c=-1+0+4=3$

답 ⑤

# 03 인수분해

**유제** 본문 20~22쪽

**1.** (1) $(2x-y+3z)^2$ (2) $(x+2)^3$
(3) $(x+3)(x^2-3x+9)$
**2.** (1) $(x+y-3)^2$ (2) $(2x-1)^3$ (3) $(x-2)(x^2+2x+4)$
**3.** (1) $(x-3)^3$ (2) $9x^2$
**4.** $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
**5.** $(x-1)^2(x+1)(x-2)$
**6.** $(2x-1)(x^2+x+1)$

**1** (1) $4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx$
$=(2x)^2+(-y)^2+(3z)^2+2(2x)(-y)+2(-y)(3z)+2(3z)(2x)$
$=(2x-y+3z)^2$
(2) $x^3+6x^2+12x+8$
$=x^3+3x^2\times2+3x\times2^2+2^3$
$=(x+2)^3$
(3) $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$
답 (1) $(2x-y+3z)^2$ (2) $(x+2)^3$
(3) $(x+3)(x^2-3x+9)$

**2** (1) $x^2+y^2+9+2xy-6x-6y$
$=x^2+y^2+(-3)^2+2xy+2y(-3)+2(-3)x$
$=(x+y-3)^2$
(2) $8x^3-12x^2+6x-1$
$=(2x)^3-3(2x)^2\times1+3(2x)\times1^2-1^3$
$=(2x-1)^3$
(3) $x^3-8=x^3-2^3$
$=(x-2)(x^2+2x+4)$
답 (1) $(x+y-3)^2$ (2) $(2x-1)^3$
(3) $(x-2)(x^2+2x+4)$

**3** (1) $x-1=t$로 놓으면 주어진 식은
$t^3-6t^2+12t-8=t^3-3t^2\times2+3t\times2^2-2^3$
$=(t-2)^3$
이때 $t=x-1$이므로
$(x-1-2)^3=(x-3)^3$
(2) $x-1=t$, $x+1=s$로 놓으면 주어진 식은
$x^2+t^2+s^2+2xt+2ts+2sx=(x+s+t)^2$
이때 $t=x-1$, $s=x+1$이므로
$(x+x-1+x+1)^2=9x^2$
답 (1) $(x-3)^3$ (2) $9x^2$

**4** $x^2=t$로 놓으면 주어진 식은
$t^2-10t+9=(t-1)(t-9)$
이때 $t=x^2$이므로
$(x^2-1)(x^2-9)=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
|다른 풀이|
$x^4-10x^2+9=x^4-6x^2+9-4x^2$
$=(x^2-3)^2-(2x)^2$
$=(x^2-3+2x)(x^2-3-2x)$
$=(x-1)(x+3)(x+1)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

**5** $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$로 놓으면
$P(1)=P(-1)=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-3$ | 1 | 3 | $-2$ |
| | | 1 | $-2$ | $-1$ | 2 |
| $-1$ | 1 | $-2$ | $-1$ | 2 | 0 |
| | | $-1$ | 3 | $-2$ | |
| | 1 | $-3$ | 2 | 0 | |

$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-3x+2)$
$=(x-1)^2(x+1)(x-2)$
답 $(x-1)^2(x+1)(x-2)$

**6** $P(x)=2x^3+x^2+x-1$로 놓으면
$P\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $P(x)$는 $x-\frac{1}{2}$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 1 | $-1$ |
| | | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 0 |

$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$
$=(2x-1)(x^2+x+1)$
답 $(2x-1)(x^2+x+1)$

## 기본 핵심 문제

본문 23쪽

| 01 ② | 02 ④ | 03 ⑤ | 04 ⑤ | 05 ③ |
|---|---|---|---|---|

**01** $x^3y-6x^2y^2+12xy^3-8y^4$
$=(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)y$
$=(x-2y)^3y$

답 ②

**02** $x^2-x=t$로 놓으면 주어진 식은
$(t+1)t-6=t^2+t-6$
$=(t+3)(t-2)$
$t=x^2-x$이므로
$(x^2-x+3)(x^2-x-2)=(x^2-x+3)(x-2)(x+1)$

답 ④

**03** $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
따라서 $x^4+4$의 인수는 $x^2+2x+2$ 또는 $x^2-2x+2$이다.

답 ⑤

**04** $P(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면 $P(1)=0$이므로 인수정리에 의해 $P(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$
그러므로 $x^2+ax+b=x^2+2x+3$이므로 $a=2$, $b=3$
따라서 $a+b=2+3=5$

답 ⑤

**05** $P(x)=x^3-5x^2+2x+a$로 놓으면 $P(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 $P(-1)=0$
$P(-1)=(-1)^3-5\times(-1)^2+2\times(-1)+a$
$=-8+a=0$
$a=8$
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+8)=(x+1)(x-2)(x-4)$
따라서 $b=-2$, $c=-4$ 또는 $b=-4$, $c=-2$이므로
$a+b+c=8-2-4=2$

답 ③

## 단원 종합 문제

본문 24~26쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ② | 03 ② | 04 ⑤ | 05 ① |
| 06 ⑤ | 07 ② | 08 ④ | 09 ① | 10 ④ |
| 11 ③ | 12 ② | 13 ① | 14 ⑤ | 15 ④ |

**01** $2A+4B=2(A+2B)$

$=2(-x^2+3x-3)$

$=-2x^2+6x-6$

이고 $2A+B=x^2$이므로 두 식의 양변을 빼서 정리하면

$4B-B=(-2x^2+6x-6)-x^2$

$=-3x^2+6x-6$

$B=-x^2+2x-2$

그러므로

$A-2B=(A+2B)-4B$

$=(-x^2+3x-3)-4(-x^2+2x-2)$

$=3x^2-5x+5$

따라서 모든 항의 계수와 상수항의 합은

$3+(-5)+5=3$

답 ③

**02** $(x^2+ax+1)(bx^2-2x+3)$

$=bx^4+(ab-2)x^3+(b+3-2a)x^2+(3a-2)x+3$

에서 $b=2$이고, $3a-2=4$이므로 $a=2$

$x^3$의 계수는 $ab-2=2\times2-2=2$이므로 $c=2$

따라서 $a+b+c=2+2+2=6$

답 ②

**03** $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)$이므로

$2(ab+bc+ca)=3^2-5=4$, $ab+bc+ca=2$

그러므로

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$=2(5+2)=14$

답 ②

**04** $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{3^3-3\times1\times3}{1}=18$

답 ⑤

**05**

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+6 \\ \hline
x-2 & x^3+x^2\phantom{-6x}-4 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & \phantom{x^3-}3x^2 \\
 & \phantom{x^3-}3x^2-6x \\ \hline
 & \phantom{x^3-3x^2-}6x-4 \\
 & \phantom{x^3-3x^2-}6x-12 \\ \hline
 & \phantom{x^3-3x^2-6x-1}8
\end{array}$$

따라서 $a=3$, $b=3$, $c=8$이므로

$a+b+c=3+3+8=14$

답 ①

**06** 등식 $(x-4)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$에 $x=1$을 대입하면

$(1-4)^4=a_4\times1^4+a_3\times1^3+a_2\times1^2+a_1\times1+a_0$

$=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$

따라서

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=(-3)^4=81$

답 ⑤

**07** $2a+b+at+2bt-2t+5=0$을 $t$에 관한 내림차순으로 정리하면

$(a+2b-2)t+2a+b+5=0$

$t$에 관한 항등식이므로

$a+2b-2=0$ ······ ㉠

$2a+b+5=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=3$

따라서 $b-a=3-(-4)=7$

답 ②

**08** $P(x)=x^3+2ax^2-a^2x+2$라 할 때 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(1)$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $P(2)$이므로 $P(1)=P(2)$이다.

그러므로

$1^3+2a\times1^2-a^2\times1+2=2^3+2a\times2^2-a^2\times2+2$

$a^2-6a-7=0$, $(a-7)(a+1)=0$

$a=7$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$7+(-1)=6$

답 ④

**09** $P(x)=(x-2)(x^2+4x+a)$라 할 때, 다항식 $P(x)$는 $(x-1)(x+b)$를 인수로 가지므로 $x-1$, $x+b$를 각각 인수로 갖는다.

그러므로 $P(1)=0$에서

$P(1)=(1-2)(1^2+4\times1+a)=0$

$a=-5$

$P(x)=(x-2)(x^2+4x-5)$

$\quad=(x-2)(x-1)(x+5)$

에서 $P(x)$의 일차항인 인수는 $x-1$, $x-2$, $x+5$이므로 $b$의 값은 $-2$ 또는 5이다.

$a=-5$이므로 $a+b$의 값이 최대가 되기 위해서는 $b=5$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $-5+5=0$

답 ①

**10** 다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & b & 1 \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+2b+8 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+b+4 & \multicolumn{1}{|c}{4a+2b+9} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

그러므로 $2a+4=4$에서 $a=0$

$4a+2b+9=3$에서 $b=-3$

$c=a+2$에서 $c=2$

따라서 $a+b+c=0+(-3)+2=-1$

답 ④

**11** $(x+2)^3+x^3+8$

$=(x+2)^3+(x+2)(x^2-2x+4)$

$=(x+2)\{(x+2)^2+x^2-2x+4\}$

$=(x+2)(2x^2+2x+8)$

그러므로 $P(x)=2x^2+2x+8$이다.

따라서 $P(-2)=2\times(-2)^2+2\times(-2)+8=12$

답 ③

**12** $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$

$=\{(x-2)(x-3)\}\{(x-1)(x-4)\}-3$

$=(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)-3$

$x^2-5x+4=t$로 놓으면 주어진 식은

$(t+2)t-3=t^2+2t-3$

$\quad=(t-1)(t+3)$

$t=x^2-5x+4$이므로

$(x^2-5x+4-1)(x^2-5x+4+3)$

$=(x^2-5x+3)(x^2-5x+7)$

답 ②

**13** $\dfrac{14^3+1}{13^3-1}=\dfrac{(14+1)(14^2-14+1)}{(13-1)(13^2+13+1)}$

$=\dfrac{15\{14(14-1)+1\}}{12\{13(13+1)+1\}}$

$=\dfrac{5(13\times14+1)}{4(13\times14+1)}$

$=\dfrac{5}{4}$

답 ①

**14** $a^4+a^2b^2+b^4$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=\{(a+b)^2-ab\}\{(a+b)^2-3ab\}$

$=(3^2-1)(3^2-3\times1)$

$=8\times6=48$

답 ⑤

**15** $P(x)=x^3-(4+k)x^2+(3+4k)x-3k$라 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -(4+k) & 3+4k & -3k \\ & & 1 & -3-k & 3k \\ \hline & 1 & -3-k & 3k & \multicolumn{1}{|c}{0} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

$(x-1)\{x^2+(-3-k)x+3k\}$

$=(x-1)(x-3)(x-k)$

$P(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 가지므로

$k=1$ 또는 $k=3$

이때 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=3$이므로 모든 실수 $\alpha$의 값의 합은 $1+3=4$

답 ④

## 서술형 유제

본문 27쪽

**출제의도**

항등식의 성질을 이용하여 $a^2+b^2$, $a+b$의 값을 구할 수 있고 곱셈 공식의 변형을 이용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

$(x+a+b)^2-2ab$

$=x^2+a^2+b^2+2ax+2ab+2xb-2ab$

$=x^2+2(a+b)x+a^2+b^2$

$=x^2+6x+5$ ……… ❶

이 등식이 항등식이므로

$a+b=3$, $a^2+b^2=5$ ……… ❷

곱셈 공식의 변형을 이용하면

$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$에서

$3^2-5=2ab$

$ab=2$ ……… ❸

따라서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times2\times3$

$=9$ ……… ❹

답 9

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 식을 전개한 경우 | 20% |
| ❷ | $a+b$, $a^2+b^2$의 값을 구한 경우 | 30% |
| ❸ | $ab$의 값을 구한 경우 | 20% |
| ❹ | $a^3+b^3$의 값을 구한 경우 | 30% |

# 04 복소수와 이차방정식

## 유제

본문 28~32쪽

**1.** (1) $2-i$ (2) $3i$ (3) $-5$ (4) $-4-2i$
**2.** (1) $x=4$, $y=2$ (2) $x=-2$, $y=-1$
**3.** (1) $-2+2i$ (2) $i$ **4.** $\frac{4}{5}+\frac{12}{5}i$
**5.** (1) 6 (2) 10 (3) $\frac{3}{5}$ **6.** 3 **7.** $3i$
**8.** $-5+3\sqrt{3}i$ **9.** 풀이 참조 **10.** 6

**1** (1) $2+i$의 켤레복소수는

$\overline{2+i}=2-i$

(2) $-3i$의 켤레복소수는

$\overline{-3i}=3i$

(3) $-5$의 켤레복소수는

$\overline{-5}=-5$

(4) $2i-4=-4+2i$의 켤레복소수는

$\overline{-4+2i}=-4-2i$

답 (1) $2-i$ (2) $3i$ (3) $-5$ (4) $-4-2i$

**2** (1) 두 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$2+xi=y+4i$에서 $2=y$, $x=4$

따라서 $x=4$, $y=2$

(2) 두 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$-i-2=x+yi$에서 $-2=x$, $-1=y$

따라서 $x=-2$, $y=-1$

답 (1) $x=4$, $y=2$ (2) $x=-2$, $y=-1$

**3** (1) $(1+i)2i=2i+2i^2$

$=2i+2\times(-1)$

$=-2+2i$

(2) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$

답 (1) $-2+2i$ (2) $i$

**4** $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{1-2i}{1-4i^2}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

이므로

$z-\frac{1}{z}=1+2i-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left\{2-\left(-\frac{2}{5}\right)\right\}i$

$=\frac{4}{5}+\frac{12}{5}i$

답 $\frac{4}{5}+\frac{12}{5}i$

**5** (1) $z+\bar{z}=(3+i)+(3-i)=3+3=6$

(2) $z\bar{z}=(3+i)(3-i)=3^2+1^2=10$

(3) $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

답 (1) 6 (2) 10 (3) $\frac{3}{5}$

**6** $z=\bar{z}$일 때, $z$는 실수이므로

$a-3=0$, $a=3$

답 3

**7** $\sqrt{2}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{-4}}$

$=\sqrt{2}\sqrt{2}i+\frac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}}+\frac{2}{2i}$

$=2i+2i-i=3i$

답 $3i$

**8** $(1+\sqrt{-12})(1+\sqrt{-3})$

$=(1+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)$

$=1+2\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}i^2$

$=1+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})i-6$

$=-5+3\sqrt{3}i$

답 $-5+3\sqrt{3}i$

**9** (1) 이차방정식 $x^2+2x+4=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{1}$

$=-1\pm\sqrt{-3}$

$=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 근은 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$이므로 허근이다.

(2) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$을 인수분해를 이용하여 풀면

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

따라서 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 실근이다.

답 풀이 참조

**10** 이차방정식 $x^2-4x+6=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-6}}{1}=2\pm\sqrt{2}i$

근은 $x=2+\sqrt{2}i$ 또는 $x=2-\sqrt{2}i$이므로

$a=c=2$이고 $b=\sqrt{2}$, $d=-\sqrt{2}$ 또는 $b=-\sqrt{2}$, $d=\sqrt{2}$

이다.

따라서 $ac-bd=2\times2-\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=6$

답 6

## 기본 핵심 문제

본문 33쪽

**01** ② **02** ① **03** ③ **04** ⑤ **05** ④

**01** $(2a+b)+(a-2b)i=3-i$에서

$2a+b=3$, $a-2b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

답 ②

**02** $(1+i)^2+(1-i)^2+i^2$

$=1+2i+i^2+1-2i+i^2+i^2$

$=2-3=-1$

답 ①

**03** $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$

이므로

$z^{10}=(z^2)^5=i^5=i^4\times i=i$

답 ③

**04** $\frac{\sqrt{-2}-1}{\sqrt{-8}+2}=\frac{\sqrt{2}i-1}{2\sqrt{2}i+2}=\frac{(\sqrt{2}i-1)^2}{2(\sqrt{2}i+1)(\sqrt{2}i-1)}$

$$=\frac{(\sqrt{2}i)^2-2\sqrt{2}i+1}{2\{(\sqrt{2}i)^2-1\}}=\frac{-2-2\sqrt{2}i+1}{2(-2-1)}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{2}i}{6}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

답 ⑤

**05** 이차방정식 $x^2-x+1=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times1}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다.

따라서

$$\frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

이므로 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 ④

## 05 이차방정식의 성질

**유제** 본문 34~38쪽

**1.** $k\le5$　**2.** $k=2$ 또는 $k=6$
**3.** (1) $-1$　(2) $-3$　**4.** 1
**5.** $2x^2+8x+10=0$　**6.** $x^2-4x+8=0$
**7.** (1) $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$
(2) $2\left(x-\dfrac{1+i}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-i}{2}\right)$
**8.** $(x-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$
**9.** 다른 한 근: $3+\sqrt{2}$, $a=-6$, $b=7$　**10.** 7

**1** 이차방정식 $x^2+4x+k-1=0$의 판별식을 $D$라 하자.
주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 $D\ge0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=2^2-(k-1)=5-k\ge0$

따라서 $k\le5$

답 $k\le5$

**2** 이차방정식 $x^2-kx+2k-3=0$의 판별식을 $D$라 하자.
주어진 이차방정식이 중근을 갖기 위해서는 $D=0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}D&=k^2-4(2k-3)\\&=k^2-8k+12\\&=(k-2)(k-6)=0\end{aligned}$$

따라서 $k=2$ 또는 $k=6$

답 $k=2$ 또는 $k=6$

**3** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{-2}=-1$

(2) $$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-\alpha-\beta+1\\&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=-2-2+1\\&=-3\end{aligned}$$

답 (1) $-1$　(2) $-3$

**4** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=2^2-2\times\frac{3}{2}\\&=4-3=1\end{aligned}$$

답 1

**5** 이차방정식의 두 근의 합과 곱은 각각

$-2+i+(-2-i)=-4$,

$(-2+i)(-2-i)=(-2)^2+1^2=5$

이므로 구하는 이차방정식은

$2(x^2+4x+5)=0$, $2x^2+8x+10=0$

답 $2x^2+8x+10=0$

**6** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=2$

두 수 $2\alpha$, $2\beta$의 합과 곱은 각각

$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\times2=4$

$(2\alpha)\times(2\beta)=4\alpha\beta=4\times2=8$

이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-4x+8=0$

답 $x^2-4x+8=0$

**7** (1) 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 근은

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times3}}{1}=1\pm\sqrt{2}i$$

이므로

$x^2-2x+3=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

(2) 이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\times1}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$$

이므로

$$2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1+i}{2}\right)\left(x-\frac{1-i}{2}\right)$$

답 (1) $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

(2) $2\left(x-\dfrac{1+i}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-i}{2}\right)$

**8** 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x+10=0$의 근은

$$x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-1\times10}}{1}=\sqrt{2}\pm2\sqrt{2}i$$

이므로

$x^2-2\sqrt{2}x+10=(x-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$

답 $(x-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$

**9** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-\sqrt{2}$이고, $a$, $b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=-a$

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=b$

이므로

$a=-6$, $b=7$

|다른 풀이|

$x=3-\sqrt{2}$라 할 때, $x-3=-\sqrt{2}$

$(x-3)^2=(-\sqrt{2})^2$, $x^2-6x+7=0$

이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 근을 구하면

$x=3\pm\sqrt{2}$

이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다.

답 다른 한 근: $3+\sqrt{2}$, $a=-6$, $b=7$

**10** 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $b+i$이고 $a$, $b$가 실수이므로 다른 한 근은 $\overline{b+i}=b-i$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$b+i+b-i=-(-4)=4$

$(b+i)(b-i)=a$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로 $a+b=5+2=7$

답 7

## 기본 핵심 문제

본문 39쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ④ | 02 ② | 03 ③ | 04 ① | 05 ⑤ |

**01** 이차방정식 $x^2-3x+k-2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-3)^2-4\times(k-2)=17-4k\geq0$

$k\leq\dfrac{17}{4}$

따라서 자연수 $k$의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 4이다.

답 ④

**02** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{2^2-2\times4}{4}=-1$$

답 ②

**03** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$이므로

$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4$$
$$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$$
$$=3-2\times(-2)+4=11$$

답 ③

**04** 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=4$

이차방정식 $x^2+bx+8=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=8$

그러므로 $4(\alpha+\beta)=8$에서 $\alpha+\beta=2$

따라서

$a=-(\alpha+\beta)=-2$,

$b=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta=-2-4=-6$

이므로

$a+b=-2+(-6)=-8$

답 ①

**05** $$1+i+\frac{i}{1-i}=1+i+\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=1+i+\frac{-1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$이고

$a$, $b$가 실수이므로 또 다른 근은 $\overline{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)=-a$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)=b$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$$a+b=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

# 06 이차방정식과 이차함수

**유제** 본문 40~44쪽

**1.** $-20$ **2.** $a=1$, $b=-2$ **3.** $k\le6$
**4.** $k=2$ 또는 $k=-2$ **5.** $k\ge-4$
**6.** $k=0$ 또는 $k=-1$
**7.** (1) 최댓값: 3, 최솟값: $-5$ (2) 최댓값: 13, 최솟값: $-3$
**8.** 80 m **9.** 100 $\mathrm{m}^2$

**1** 이차함수 $y=x^2-4x-5$의 그래프와 $x$축과의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$이므로 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-4x-5=0$의 서로 다른 두 실근이다.

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-5$

따라서

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=(-5)\times4=-20$$

답 $-20$

**2** 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 $x$축과 만나는 교점의 좌표가 $(1, 0)$, $(-2, 0)$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근은 $1$, $-2$이다.

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$1+(-2)=-a$, $1\times(-2)=b$

따라서 $a=1$, $b=-2$

답 $a=1$, $b=-2$

**3** 이차방정식 $x^2+4x+k-2=0$의 판별식을 $D$라 할 때

$\frac{D}{4}=2^2-(k-2)=6-k$

이차함수의 그래프가 $x$축과 만나려면 $D\ge0$이므로

$6-k\ge0$

따라서 $k\le6$

답 $k\le6$

**4** 이차방정식 $(k^2+12)x^2-4kx+1=0$의 판별식을 $D$라 할 때

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(k^2+12)\times1=3k^2-12$

이차함수의 그래프가 $x$축에 접하면 $D=0$이므로

$3k^2-12=0$, $k=\pm 2$

따라서 $k=2$ 또는 $k=-2$

답 $k=2$ 또는 $k=-2$

**5** 이차함수 $y=x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나기 위해서는 이차방정식 $x^2+5x=x+k$, 즉 $x^2+4x-k=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=2^2-1\times(-k)=k+4$

$D\geq 0$이므로

$k+4\geq 0$, $k\geq -4$

답 $k\geq -4$

**6** 이차함수 $y=x^2-2kx+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k^2$이 한 점에서 만나기 위해서는 이차방정식

$x^2-2kx+1=2x+k^2$, 즉

$x^2-2(k+1)x+1-k^2=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-1\times(1-k^2)=2k^2+2k$

$D=0$이므로

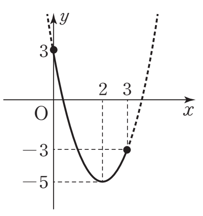
$2k^2+2k=0$, $k(k+1)=0$

따라서 $k=0$ 또는 $k=-1$

답 $k=$ 0 또는 $k=-1$

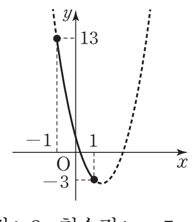
**7** $y=2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5$

이다.




(1) $0\leq x\leq 3$일 때,

주어진 함수는 $x=0$일 때 최댓값 3을 갖고 $x=2$일 때 최솟값 $-5$를 갖는다.




(2) $-1\leq x\leq 1$일 때,

주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 13을 갖고 $x=1$일 때 최솟값 $-3$을 갖는다.

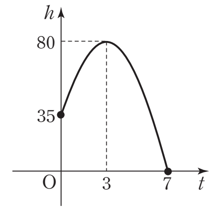
답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: $-5$

(2) 최댓값: 13, 최솟값: $-3$

**8** $h=-5t^2+30t+35$

$=-5(t-3)^2+80$

이므로 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같다.




그러므로 $0\leq t\leq 7$에서 이차함수 $h=-5t^2+30t+35$의 최댓값은 $t=3$일 때 80이다.

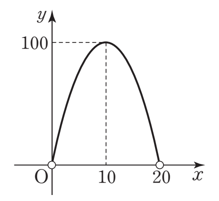
답 80 m

**9** 텃밭의 가로의 길이를 $x$ m, 넓이를 $y$ $\text{m}^2$이라 하면 세로의 길이는 $(20-x)$ m이므로 $0<x<20$이고 $x$와 $y$의 관계식은 $y=x(20-x)$이다.

$y=x(20-x)=-x^2+20x$

$=-(x-10)^2+100$

이므로 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




그러므로 $0<x<20$에서 이차함수 $y=x(20-x)$의 최댓값은 $x=10$일 때 100이다.

답 100 $\text{m}^2$

## 기본 핵심 문제

본문 45쪽

**01** ⑤ **02** ① **03** ② **04** ③ **05** ④

**01** $\text{A}(a,\ 0)$, $\text{B}(b,\ 0)$이라 하면 $\overline{\text{AB}}=6$이므로

$|b-a|=6$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $a+b=4$, $ab=k$

$|b-a|=6$에서 $a^2-2ab+b^2=36$ ······ ㉠

$a+b=4$에서 $a^2+2ab+b^2=16$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $4ab=-20$, $ab=-5$

따라서 $k=-5$

답 ⑤

**02** $f(x)=x^2+ax+b$($a$, $b$는 상수)라 하자.

$f(1)=f(5)$이므로

$1^2+a\times 1+b=5^2+5\times a+b$, $a=-6$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 점에서 만나므로

이차방정식 $x^2-6x+b=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D=0$이다.

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times b=9-b=0$, $b=9$

따라서 $f(x)=x^2-6x+9$이므로

$f(2)=2^2-6\times2+9=1$

답 ①

**03** 이차함수 $y=-2x^2+6x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나기 위해서는 이차방정식 $-2x^2+6x=2x+k$, 즉 $2x^2-4x+k=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times k=4-2k$

이차함수와 직선이 만나야 하므로 $D\geq0$이고

$4-2k\geq0$, $k\leq2$이므로 자연수 $k$는 1, 2이고 그 개수는 2이다.

답 ②

**04** $y=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$이므로 $2\leq x\leq a$에서 이차함수 $y=x^2-2x+b$의 최댓값은 $x=a$에서 13, 최솟값은 $x=2$에서 5이다.

$a^2-2a+b=13$, $2^2-2\times2+b=5$이고 $b=5$

$a^2-2a+5=13$, $a^2-2a-8=0$, $(a-4)(a+2)=0$

$a=4$ 또는 $a=-2$

$a\geq2$이므로 $a=4$

따라서 $a=4$, $b=5$이므로 $a+b=4+5=9$

답 ③

**05** 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(-t, 0)$, $\mathrm{B}(t, 0)$이라 하자.
점 C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{C}(t, -t^2+4)$, $\mathrm{D}(-t, -t^2+4)$

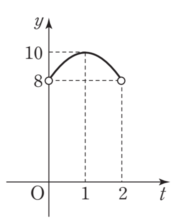
이고 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $0<t<2$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=2t$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=-t^2+4$이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $y$라 하면

$y=2\{2t+(-t^2+4)\}$

$\quad=-2t^2+4t+8$

$\quad=-2(t-1)^2+10$




따라서 $0<t<2$에서 이차함수 $y=-2t^2+4t+8$의 최댓값은 $t=1$일 때 10이다.

답 ④

# 07 여러 가지 방정식

**유제** 본문 46~48쪽

**1.** (1) $x=-2$ (2) $x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

**2.** (1) $x=1$ 또는 $x=\pm i$ (2) $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-2$

**3.** (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=\pm1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=4$

**4.** (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

**5.** (1) $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

**1** (1) 인수분해 공식을 이용하여 인수분해하면

$(x+2)^3=0$

따라서 $x=-2$

(2) 인수분해 공식을 이용하여 인수분해하면

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$x=3$ 또는 $x^2+3x+9=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 (1) $x=-2$ (2) $x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

**2** (1) $x^3-x^2+x-1=0$에서 $x^2(x-1)+(x-1)=0$

$(x^2+1)(x-1)=0$

$x^2+1=0$ 또는 $x=1$

따라서 $x=1$ 또는 $x=\pm i$

(2) $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-3$ | $-6$ | 8 |
| | | 1 | $-2$ | $-8$ |
| | 1 | $-2$ | $-8$ | 0 |

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$이므로 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x-8)=0$

$(x-1)(x-4)(x+2)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-2$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=\pm i$

(2) $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-2$

**3** (1) $x^4-x^3+x-1=x^3(x-1)+(x-1)$이므로

공통인수인 $x-1$로 묶어 인수분해하면

$(x-1)(x^3+1)=0$

$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 $x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+2x+8$이라 하면

$f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 $x-1$, $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

그러므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-2$ | $-9$ | 2 | 8 |
| | | 1 | $-1$ | $-10$ | $-8$ |
| $-1$ | 1 | $-1$ | $-10$ | $-8$ | 0 |
| | | $-1$ | 2 | 8 | |
| | 1 | $-2$ | $-8$ | 0 | |

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-2x-8)$이므로 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x^2-2x-8)=0$

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-4)=0$

따라서 $x=\pm1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=4$

답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=\pm1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=4$

**4** (1) $x^2=X$라 하면

$X^2-5X+4=0$, $(X-1)(X-4)=0$

$X=1$ 또는 $X=4$

$X=x^2$이므로

$x^2=1$ 또는 $x^2=4$

따라서 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2-x+2)(x^2+x+2)$

이므로

$(x^2-x+2)(x^2+x+2)=0$

$x^2-x+2=0$ 또는 $x^2+x+2=0$

따라서

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

**5** (1) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 $y$에 대하여 정리하면 $y=x-2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(x-2)+(x-2)^2=1$

$3x^2-6x+3=0$, $(x-1)^2=0$, $x=1$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3xy+4y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$이므로

$x+y=0$ 또는 $x-y=0$

$y=-x$ ⋯⋯ ㉢, $y=x$ ⋯⋯ ㉣

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+3x^2+4x^2=8$, $x^2=1$

$x=1$ 또는 $x=-1$이므로

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=1$

㉣을 ㉡에 대입하면

$x^2-3x^2+4x^2=8$, $x^2=4$

$x=2$ 또는 $x=-2$이므로

$x=2$를 ㉣에 대입하면 $y=2$

$x=-2$를 ㉣에 대입하면 $y=-2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

## 기본 핵심 문제

본문 49쪽

01 ⑤ 02 ② 03 ① 04 ⑤ 05 ③

**01** 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2-bx+b-1=0$의 두 근이 1, 2이므로 $x=1$을 대입하면

$1^3+(a+1)\times1^2-b\times1+b-1=0$

$a+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$2^3+(a+1)\times2^2-b\times2+b-1=0$

$4a-b+11=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=7$

삼차방정식 $x^3-7x+6=0$에서

$(x-1)(x-2)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$

그러므로 $c=-3$이다.

따라서 $a+b+c=-1+7-3=3$

답 ⑤

**02** $f(x)=x^3+3x^2+(k-4)x-k$라 하면

$f(1)=0$이므로 $x-1$을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | $k-4$ | $-k$ |
| | | 1 | 4 | $k$ |
| | 1 | 4 | $k$ | 0 |

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+k)$이므로 방정식 $(x-1)(x^2+4x+k)=0$이 중근을 갖기 위해서는 $x^2+4x+k=0$이 중근을 갖거나 $x=1$을 근으로 가져야 한다.

그러므로 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-k=4-k=0$, $k=4$

이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 $x=1$을 실근으로 갖는다면

$1^2+4\times1+k=0$, $k=-5$

따라서 $k=4$ 또는 $k=-5$이므로 합은

$4+(-5)=-1$

답 ②

**03** $x^4-9x^2+16=x^4-8x^2+16-x^2$

$=(x^2-4)^2-x^2$

$=(x^2+x-4)(x^2-x-4)$

이므로 $(x^2+x-4)(x^2-x-4)=0$에서

$x^2+x-4=0$ 또는 $x^2-x-4=0$

실근은 $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$M=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $m=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

따라서 $\frac{M}{m}=\frac{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}}=-1$

답 ①

**04** $\begin{cases}2x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 $y$에 대하여 정리하면 $y=2x+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-(2x+1)^2=-1$

$3x^2+4x=0$

$x(3x+4)=0$

그러므로 $x=0$ 또는 $x=-\frac{4}{3}$이고 ㉢에 대입하여 $y$의 값을 구하면 $y=1$, $y=-\frac{5}{3}$

$x+y$의 값은 $0+1=1$ 또는 $-\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-3$

따라서 $x+y$의 최댓값은 1이다.

답 ⑤

**05** $\begin{cases}x+y=k & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 $y$에 대하여 정리하면 $y=-x+k$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+k)^2=10$

$2x^2-2kx+k^2-10=0$

연립방정식의 해가 오직 한 쌍만 존재해야 하므로

이차방정식 $2x^2-2kx+k^2-10=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D=0$이다.

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=-k^2+20=0$

$k=\pm2\sqrt{5}$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 곱은

$2\sqrt{5}\times(-2\sqrt{5})=-20$

답 ③

## 08 여러 가지 부등식

**유제** 본문 50~54쪽

**1.** (1) $1<x\le 2$ (2) $-2<x\le 2$

**2.** (1) $-1<x<\frac{11}{3}$ (2) $x\ge 0$ 또는 $x\le -\frac{3}{2}$

**3.** (1) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ (2) $x>2$

**4.** (1) $-2\le x\le 4$ (2) 없다. (3) 모든 실수
(4) $x\ne 1$인 모든 실수

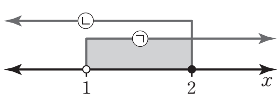
**5.** $a=-9$, $b=6$ **6.** $a=4$, $b=6$

**7.** $-2\le x<3$ **8.** $-1\le x\le 1$

**1** (1) $2x+1<4x-1$에서 $x>1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2x-5\le -3x+5$에서 $x\le 2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




따라서 주어진 연립일차부등식의 해는

$1<x\le 2$

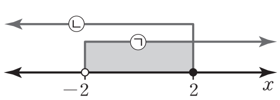
(2) $x+1<2x+3\le -2x+11$을 두 개의 일차부등식으로 나타내면

$\begin{cases} x+1<2x+3 \\ 2x+3\le -2x+11 \end{cases}$

$x+1<2x+3$에서 $x>-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2x+3\le -2x+11$에서 $x\le 2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




따라서 주어진 연립일차부등식의 해는

$-2<x\le 2$

답 (1) $1<x\le 2$ (2) $-2<x\le 2$

**2** (1) $|3x-4|<7$에서 $-7<3x-4<7$

위의 부등식의 각 변에 4를 더하면

$-3<3x<11$

따라서 $-1<x<\frac{11}{3}$

(2) $|4x+3|\ge 3$에서 $4x+3\ge 3$ 또는 $4x+3\le -3$

따라서 $x\ge 0$ 또는 $x\le -\frac{3}{2}$

답 (1) $-1<x<\frac{11}{3}$ (2) $x\ge 0$ 또는 $x\le -\frac{3}{2}$

**3** (1) (i) $x<0$일 때,

$|x|=-x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$-x-(x-1)\le 2$

$-2x\le 1$, $x\ge -\frac{1}{2}$

따라서 $-\frac{1}{2}\le x<0$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$|x|=x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$x-(x-1)\le 2$, $1\le 2$

따라서 $0\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$|x|=x$, $|x-1|=x-1$이므로

$x+(x-1)\le 2$

$2x-1\le 2$, $x\le\frac{3}{2}$

따라서 $1\le x\le\frac{3}{2}$이다.

(i)~(iii)에 의해 $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

(2) (i) $x<-2$일 때,

$|x+2|=-(x+2)$, $|x-4|=-(x-4)$이므로

$-(x+2)+(x-4)>2$

$-6>2$는 모순이므로 조건을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-2\le x<4$일 때,

$|x+2|=x+2$, $|x-4|=-(x-4)$이므로

$(x+2)+(x-4)>2$

$2x-2>2$, $x>2$

따라서 $2<x<4$

(iii) $x\ge 4$일 때,

$|x+2|=x+2$, $|x-4|=x-4$이므로

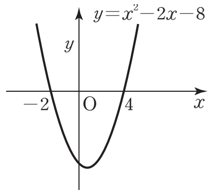
$(x+2)-(x-4)>2$, $6>2$

따라서 $x\ge 4$

(i)~(iii)에 의해 $x>2$

답 (1) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ (2) $x>2$

**4** (1) 이차함수 $y=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만난다.




따라서 이차부등식 $x^2-2x-8\le0$의 해는 $-2\le x\le4$

(2) $-x^2+2x-9>0$의 양변에 $-1$을 곱하면

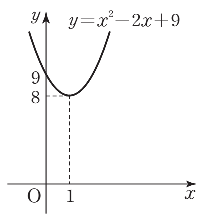
$x^2-2x+9<0$

이차방정식 $x^2-2x+9=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times9$

$=-8<0$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x+9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 만나지 않는다.



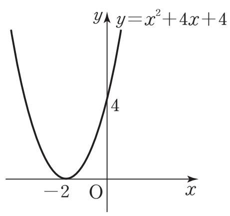

따라서 이차부등식 $x^2-2x+9<0$의 해는 없다.

(3) 이차함수

$y=x^2+4x+4$

$=(x+2)^2$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 한 점 $(-2,\ 0)$에서 만난다.




따라서 이차부등식 $x^2+4x+4\ge0$의 해는 모든 실수이다.

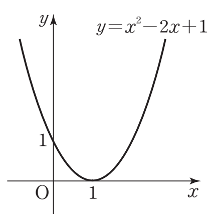
(4) $-x^2+2x-1<0$의 양변에 $-1$을 곱하면

$x^2-2x+1>0$

이차함수

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축에서 한 점 $(1,\ 0)$에서 만난다.




따라서 이차부등식 $x^2-2x+1>0$의 해는 $x\ne1$인 모든 실수이다.

답 (1) $-2\le x\le4$ (2) 없다.
(3) 모든 실수 (4) $x\ne1$인 모든 실수

**5** 이차항의 계수가 1이고 해가 $1\le x\le2$인 이차부등식은

$(x-1)(x-2)\le0$, 즉 $x^2-3x+2\le0$

이 부등식과 $3x^2+ax+b\le0$이 같아야 하므로

$x^2-3x+2\le0$의 양변에 3을 곱하면 $3x^2-9x+6\le0$

따라서 $a=-9$, $b=6$

답 $a=-9$, $b=6$

**6** 이차항의 계수가 1이고 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$인 이차부등식은 $(x+1)(x-3)>0$, 즉 $x^2-2x-3>0$

이 부등식과 $-2x^2+ax+b<0$이 같아야 하므로

$x^2-2x-3>0$의 양변에 $-2$를 곱하면

$-2x^2+4x+6<0$

따라서 $a=4$, $b=6$

답 $a=4$, $b=6$

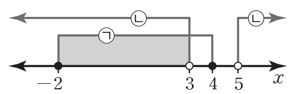
**7** $x^2-2x-8\le0$에서 $(x-4)(x+2)\le0$

$-2\le x\le4$ …… ㉠

$x^2-8x+15>0$에서 $(x-3)(x-5)>0$

$x>5$ 또는 $x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-2\le x<3$

답 $-2\le x<3$

**8** $x^2+2x-1\le2x^2-4x+4$에서

$x^2-6x+5\ge0$

$(x-1)(x-5)\ge0$

$x\ge5$ 또는 $x\le1$ …… ㉠

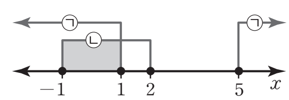
$2x^2-4x+4\le x^2-3x+6$에서

$x^2-x-2\le0$

$(x-2)(x+1)\le0$

$-1\le x\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1\le x\le1$

답 $-1\le x\le1$

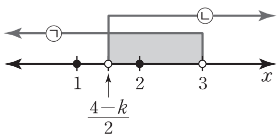
## 기본 핵심 문제

본문 55쪽

**01** ① **02** ④ **03** ④ **04** ② **05** ③

**01** $3x+1<2x+4$에서 $x<3$ …… ㉠

$2x+4<4x+k$에서 $x>\frac{4-k}{2}$ …… ㉡




그림과 같이 ㉠, ㉡을 연립하였을 때 주어진 부등식을 만족시키는 정수의 개수가 1이므로 그 정수는 2이어야 한다.

그러므로 $1\le\frac{4-k}{2}<2$이고

$1\le\frac{4-k}{2}$에서 $k\le2$ …… ㉢

$\frac{4-k}{2}<2$에서 $k>0$ …… ㉣

따라서 ㉢, ㉣에서 $0<k\le2$

답 ①

**02** $3\le|x-1|$에서

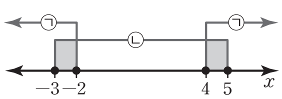
$x-1\ge3$ 또는 $x-1\le-3$

$x\ge4$ 또는 $x\le-2$ …… ㉠

$|x-1|\le4$에서

$-4\le x-1\le4$, $-3\le x\le5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




그러므로 주어진 연립부등식의 해는

$-3\le x\le-2$ 또는 $4\le x\le5$

이므로 구하는 정수 $x$의 값은 $-3$, $-2$, $4$, $5$이고 그 개수는 4이다.

답 ④

**03** (i) $x\ge0$일 때

$x^2+x-6\le0$, $(x+3)(x-2)\le0$

$-3\le x\le2$

따라서 $0\le x\le2$

(ii) $x<0$일 때

$x^2-x-6\le0$, $(x+2)(x-3)\le0$

$-2\le x\le3$

따라서 $-2\le x<0$

(i), (ii)에 의해 $-2\le x\le2$이므로 $M=2$, $m=-2$이고

$Mm=2\times(-2)=-4$

|다른 풀이|

$x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2+|x|-6\le0$, $(|x|+3)(|x|-2)\le0$

$-3\le|x|\le2$

따라서 $-2\le x\le2$이므로 $M=2$, $m=-2$이고

$Mm=2\times(-2)=-4$

답 ④

**04** $x$에 대한 이차부등식 $x^2+2kx+k^2-3k+6\le0$의 해의 개수가 1이기 위해서는 $x$에 대한 이차방정식

$x^2+2kx+k^2-3k+6=0$의 판별식을 $D$라 할 때 $D=0$이어야 한다. 그러므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+6)=3k-6=0$

따라서 $k=2$

답 ②

**05** $x^2-3x-4\ge0$에서

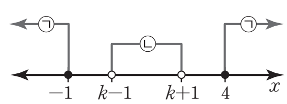
$(x-4)(x+1)\ge0$

$x\ge4$ 또는 $x\le-1$ …… ㉠

$|x-k|<1$에서

$-1<x-k<1$

$k-1<x<k+1$ …… ㉡




그림과 같이 ㉠, ㉡을 연립하였을 때 해가 존재하지 않기 위해서는

$k+1\le4$ …… ㉢, $k-1\ge-1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의해 $0\le k\le3$

따라서 구하는 정수 $k$의 값은 0, 1, 2, 3이므로 개수는 4이다.

답 ③

## 단원 종합 문제

본문 56~58쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ① | 03 ③ | 04 ④ | 05 ② |
| 06 ③ | 07 ⑤ | 08 ⑤ | 09 ④ | 10 ① |
| 11 ② | 12 ④ | 13 ③ | | |

**01** $z=k-2+(1+i)k-2i$

$\quad=(2k-2)+(k-2)i$

이므로

$z^2=\{(2k-2)^2-(k-2)^2\}+2(2k-2)(k-2)i$

그러므로 $z^2$이 실수가 되기 위해서는

$(2k-2)(k-2)=0$이므로 $k=1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은 $1+2=3$

답 ③

**02** $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$(2z-1)^2=(\sqrt{3}i)^2$, $z^2-z+1=0$

따라서

$z^3-z^2+z+1=z(z^2-z+1)+1=1$

답 ①

**03** $\alpha=\dfrac{3}{\overline{\alpha}}$, $\beta=\dfrac{3}{\overline{\beta}}$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{3}{\overline{\alpha}}-\dfrac{3}{\overline{\beta}}=\dfrac{3(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=\dfrac{3\times 2i}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=2i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=3$

따라서 $\alpha\beta=(\overline{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}})=3$

답 ③

**04** 이차방정식 $(n+4)x^2+2nx+n-3=0$의 판별식을 $D$라 할 때, 이차방정식이 실근을 가지므로 $D\geq 0$이다.

그러므로

$\dfrac{D}{4}=n^2-(n+4)(n-3)=-n+12\geq 0$

따라서 $n\leq 12$이므로 자연수 $n$의 개수는 12이다.

답 ④

**05** 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=4$

$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=8-2\times\sqrt{4}=4$

따라서 $\alpha<\beta$이므로 $\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=2$

답 ②

**06** 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근은 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$, $\dfrac{\beta^2}{1-\beta}$

이므로 근과 계수의 관계에서

$\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}+\dfrac{\beta^2}{1-\beta}=-a$, $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}\times\dfrac{\beta^2}{1-\beta}=b$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{1-\alpha}+\frac{\beta^2}{1-\beta}&=\frac{\alpha^2(1-\beta)+\beta^2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\alpha\beta(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\&=\frac{4^2-2\times 2-2\times 4}{1-4+2}=-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\times\frac{\beta^2}{1-\beta}&=\frac{\alpha^2\beta^2}{(1-\alpha)(1-\beta)}\\&=\frac{(\alpha\beta)^2}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\&=\frac{2^2}{1-4+2}=-4\end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=-4$이므로

$a+b=4+(-4)=0$

답 ③

**07** 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 $x$축의 두 교점의 $x$좌표가 각각 $-1$, 5이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 $-1$, 5이다.

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$-1+5=-a$, $(-1)\times 5=b$

$a=-4$, $b=-5$

이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2-5x+4=0$의 실근이다.

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

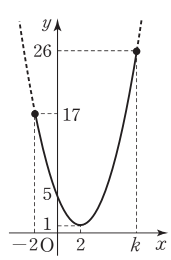
따라서 두 점 사이의 거리는 $4-1=3$

답 ⑤

**08** $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

이고 $-2\leq x\leq k$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로 $k\geq 2$이어야 한다.

$-2\leq x\leq k$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 26이고



$f(-2)=(-2-2)^2+1=17$

이므로 $f(k)=26$

$f(k)=k^2-4k+5=26$

$k^2-4k-21=0$, $(k-7)(k+3)=0$

따라서 $k\geq 2$이므로 $k=7$

답 ⑤

**09** $f(x)=x^3-x-6$이라 하면 $f(2)=0$이므로 다항식 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

그러므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+3)$

이고 삼차방정식 $(x-2)(x^2+2x+3)=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 허근이다.

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

따라서

$$\begin{aligned}(\alpha^2+1)(\beta^2+1)&=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1\\&=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1\\&=3^2+(-2)^2-2\times3+1=8\end{aligned}$$

답 ④

**10** $x^2-2x=X$라 하면

$X^2+X-6=0$

$(X-2)(X+3)=0$

$(x^2-2x-2)(x^2-2x+3)=0$

$x^2-2x-2=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 판별식을 $D_1$이라 할 때

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-2)=3>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 $D_2$라 할 때

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1\times3=-2<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

그러므로 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

따라서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-2}=-1$$

답 ①

**11** $\omega$는 방정식 $x^3=1$의 한 허근이므로 $\omega$를 대입하면

$\omega^3=1$, $\omega^3-1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^3+\omega^4+\omega^5=\omega^3(1+\omega+\omega^2)=0$

이므로 연속된 세 개의 $\omega$의 거듭제곱의 합은 0이 된다.

따라서

$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{50}$

$=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)+\cdots+(\omega^{48}+\omega^{49}+\omega^{50})$

$=0$

답 ②

**12** (i) $x<0$일 때,

$|x|=-x$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$-x-(x-2)\leq4$, $x\geq-1$

따라서 $-1\leq x<0$

(ii) $0\leq x<2$일 때,

$|x|=x$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$x-(x-2)\leq4$, $2\leq4$

따라서 $0\leq x<2$

(iii) $x\geq2$일 때,

$|x|=x$, $|x-2|=x-2$이므로

$x+(x-2)\leq4$, $x\leq3$

따라서 $2\leq x\leq3$

(i)~(iii)에 의해 $-1\leq x\leq3$

이차부등식 $x^2+ax+b\leq0$의 해가 $-1\leq x\leq3$이므로

$-1+3=-a$, $(-1)\times3=b$에서

$a=-2$, $b=-3$

따라서 $ab=(-2)\times(-3)=6$

답 ④

**13** (i) $k=1$일 때

$3<0$이므로 부등식을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k\neq1$일 때

이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x+3<0$이 해를 갖지 않기 위해서는 $k-1>0$이어야 하고 이차방정식

$(k-1)x^2-2(k-1)x+3=0$의 판별식을 $D$라 할 때 $D\le 0$이어야 한다.

$k-1>0$에서 $k>1$ …… ㉠

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k-1)\times 3$

$=k^2-5k+4=(k-1)(k-4)\le 0$

$1\le k\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $1<k\le 4$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 $k$의 값의 범위는 $1\le k\le 4$이므로 정수 $k$의 값은 1, 2, 3, 4이고 개수는 4이다.

답 ③

## 서술형 유제

본문 59쪽

**출제의도**

이차부등식의 해에 관한 조건을 이용할 수 있고, 부등식을 만들어 실수 $k$의 값의 범위를 구할 수 있다.

**풀이**

이차부등식 $kx^2-4kx-3<0$의 양변에 $-1$을 곱하면

$-kx^2+4kx+3>0$

모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $-kx^2+4kx+3>0$이 성립하기 위해서는 $-k>0$이고 이차방정식 $-kx^2+4kx+3=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D<0$이어야 한다. ❶

$-k>0$에서 $k<0$ …… ㉠

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-k)\times 3$

$=4k^2+3k$

$=k(4k+3)<0$

$-\frac{3}{4}<k<0$ …… ㉡ ❷

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $-\frac{3}{4}<k<0$ ❸

답 $-\frac{3}{4}<k<0$

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 모든 실수에 대해 이차부등식이 성립할 조건을 구한 경우 | 40% |
| ❷ | 조건에 맞는 부등식을 구한 경우 | 40% |
| ❸ | 부등식을 연립하여 해를 구한 경우 | 20% |

# 09 경우의 수

## 유제

본문 60~64쪽

**1.** 8 **2.** 4 **3.** 18 **4.** 6
**5.** (1) 42 (2) 6 (3) 24 **6.** 504
**7.** (1) 240 (2) 1440 **8.** 144 **9.** 56
**10.** 21

**1** 3종류의 샌드위치 중 한 개를 고르는 경우의 수는 3이고 5종류의 삼각김밥 중 한 개를 고르는 경우의 수는 5이다. 샌드위치와 삼각김밥을 고르는 것이 겹치지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+5=8$

답 8

**2** 4의 약수는 1, 2, 4이고 이 중 두 주사위 눈의 수의 합으로 가능한 경우는 2 또는 4이다.

눈의 수의 합이 2인 경우는 (1, 1)로 1가지이고 눈의 수의 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이다.

눈의 수의 합이 2인 경우와 4인 경우는 겹치지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+3=4$

답 4

**3** 6종류의 포장지 중 하나를 선택하는 경우의 수는 6이고 그 각각에 대하여 3종류의 끈 중 하나를 선택하는 경우의 수는 3이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times 3=18$

답 18

**4** 주사위 $A$에서 소수의 눈 2, 3, 5 중 하나가 나오는 경우의 수는 3이고 그 각각에 대하여 주사위 $B$에서 3의 배수의 눈 3, 6 중 하나가 나오는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times 2=6$

답 6

**5** (1) ${}_7P_2=7\times6=42$

(2) ${}_6P_1=6$

(3) ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

답 (1) 42 (2) 6 (3) 24

**6** 구하는 경우의 수는 9개의 놀이기구 중에서 3개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_9P_3=9\times8\times7=504$

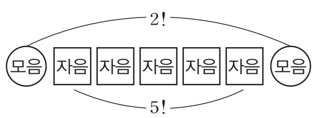
답 504

**7** (1) 모음 e, i를 양 끝에 나열하는 경우의 수는 $2!$

그 각각에 대하여 자음 n, g, l, s, h를 모음 사이에 나열하는 경우의 수는 $5!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2!\times5!=2\times120=240$

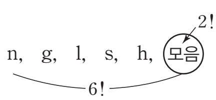



(2) 모음 e, i를 이웃시켜 하나의 그룹으로 생각하면 이 그룹과 나머지 자음 n, g, l, s, h를 나열하는 경우의 수는 $6!$

그 각각에 대하여 모음을 모아놓은 묶음 안에서 e와 i를 나열하는 경우의 수는 $2!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6!\times2!=720\times2=1440$




답 (1) 240 (2) 1440

**8** 서로 다른 국어교재 2권을 하나의 묶음으로 생각하고, 서로 다른 수학교재 2권을 하나의 묶음으로 생각하고, 서로 다른 영어교재 3권을 하나의 묶음으로 생각하면 이 세 묶음을 나열하는 경우의 수는 $3!$

그 각각에 대하여 국어교재 2권을 나열하는 경우의 수는 $2!$

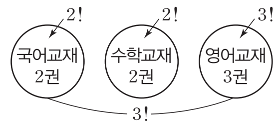
또 그 각각에 대하여 수학교재 2권을 나열하는 경우의 수는 $2!$

또 그 각각에 대하여 영어교재 3권을 나열하는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3!\times2!\times2!\times3!=6\times2\times2\times6$

$=144$




답 144

**9** 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하면 되므로

${}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 56

**10** 악수는 2명이 서로 하는 것이므로 7명 중에서 2명을 선택해서 그 둘이 악수를 한다고 생각하면 악수의 총 횟수는 7명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수와 같다.

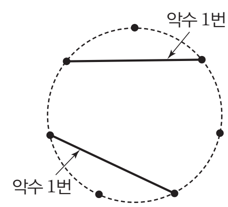
따라서 구하는 악수의 총 횟수는

${}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

답 21

|참고|

7명이 서로 악수하는 총 횟수는 원 위의 7개의 점으로 만들 수 있는 선분의 개수와 같다.



## 기본 핵심 문제

본문 65쪽

**01** ③ **02** ⑤ **03** ⑤ **04** ④ **05** ①

**01** 눈의 수의 합이 5의 배수가 되는 경우는 5와 10이고 두 주사위의 눈의 수를 순서쌍으로 표현하면

합이 5인 경우 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

합이 10인 경우 : (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 $4+3=7$ …… ㉠

눈의 수의 합이 7의 배수가 되는 경우는 7뿐이고 두 주사위의 눈의 수를 순서쌍으로 표현하면

합이 7인 경우 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지 …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$7+6=13$

답 ③

**02** 500원짜리 동전 3개 중 3개, 2개, 1개를 지불하거나 전혀 사용하지 않는 4가지의 각 경우마다 100원짜리 동전 4개 중 4개, 3개, 2개, 1개를 지불하거나 전혀 사용하지 않는 5가지의 경우 지불하는 금액이 서로 다르므로 지불하는 금액이 서로 다른 경우의 수는

$4\times5=20$

이때 500원과 100원을 모두 사용하지 않는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$20-1=19$

답 ⑤

**03** 세 자리 자연수가 되어야 하므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하고 그 경우의 수는 4

이때 그 각각의 경우에 대하여 백의 자리에 온 숫자를 제외하고 0 포함 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하여 순서대로 십의 자리, 일의 자리에 놓으면 그때마다 서로 다른 세 자리 자연수가 만들어지고 그 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times12=48$

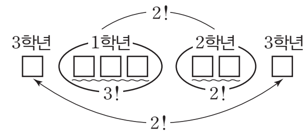
답 ⑤

**04** 3학년이 양 끝에 서는 경우의 수는 2!

그 각각의 경우에 1학년을 모은 그룹과 2학년을 모은 그룹, 이 두 그룹을 나열하는 경우의 수는 2!

또 그 각각의 경우에 1학년 그룹 안에서 1학년 3명을 나열하는 경우의 수는 3!이고 2학년 그룹 안에서 2학년 2명을 나열하는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2!\times2!\times3!\times2!=2\times2\times6\times2=48$




답 ④

**05** 원 위의 7개의 점 중에서 2개의 점을 선택하여 선분의 양 끝점으로 할 때마다 선분이 결정되고 이 선분들은 모두 서로 다르므로

$a={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

원 위의 7개의 점 중에서 3개의 점을 선택하여 삼각형의 꼭짓점으로 할 때마다 삼각형이 결정되고 이 삼각형들은 모두 서로 다르므로

$b={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

원 위의 7개의 점 중에서 4개의 점을 선택하여 사각형의 꼭짓점으로 할 때마다 사각형이 결정되고 이 사각형들은 모두 서로 다르므로

$c={}_7C_4=\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

따라서 $a+b+c=21+35+35=91$

답 ①

| 참고 |

원 위에 있는 $n$개 점을 꼭짓점으로 하는 서로 다른 $k$각형의 개수는 ${}_nC_k$ (단, $3\le k\le n$)

## 단원 종합 문제

본문 66~68쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ② | 02 ② | 03 ⑤ | 04 ④ | 05 ④ |
| 06 ④ | 07 ④ | 08 ④ | 09 ③ | 10 ② |
| 11 ② | 12 ④ | 13 ① | 14 ③ | |

**01** 두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 $a$, 일의 자리의 숫자를 $b$라 하자.

각 자리의 숫자의 합이 5가 되는 경우를 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$로 나타내면

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$의 5가지

각 자리의 숫자의 합이 7이 되는 경우를 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$로 나타내면

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$, $(7, 0)$의 7가지

따라서 구하는 자연수의 개수는 합의 법칙에 의하여

$5+7=12$

답 ②

**02** 집-도서관-학교의 순서로 가는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times2=6$ …… ㉠

집-마트-학교의 순서로 가는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times3=6$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+6=12$

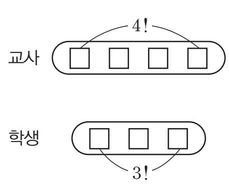
답 ②

**03** 앞 줄에 학생 3명을 세우는 경우의 수는 $3!$

그 각각의 경우에 교사 4명을 뒷 줄에 세우는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3!\times4!=6\times24=144$

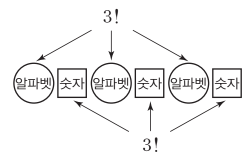



답 ⑤

**04** 알파벳과 숫자가 교대로 나오도록 배열하는 경우는 '알파벳-숫자-알파벳-숫자-알파벳-숫자'로 배열하거나 '숫자-알파벳-숫자-알파벳-숫자-알파벳'으로 배열하는 경우이다.

(i) '알파벳-숫자-알파벳-숫자-알파벳-숫자' 형태로 나열하기 위해 알파벳을 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 자리에 배열하는 경우의 수는 $3!$이고 그 각각의 경우에 숫자를 두 번째, 네 번째, 여섯 번째 자리에 배열하는 경우의 수는 $3!$이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$




(ii) '숫자-알파벳-숫자-알파벳-숫자-알파벳' 형태로 나열하는 경우도 마찬가지로 하면 경우의 수는 36

(i), (ii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$36+36=72$

답 ④

|참고|

경우의 수를 구하는 구조가 같을 때에는 마찬가지 방법으로 구하여 풀이의 과정을 줄일 수 있다.

**05** 30000보다 큰 짝수인 자연수가 되려면 만의 자리의 숫자가 3 또는 4이어야 하고 일의 자리의 숫자는 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 만의 자릿 수가 3인 경우

일의 자리에 0 또는 2 또는 4가 오면 되고 그 경우의 수는 3

그 각각의 경우에 천, 백, 십의 자리에는 일의 자리에 사용된 숫자를 제외하고 나머지 숫자 3개를 배열하면 되고 그 경우의 수는 $3!$

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3\times3!=3\times6=18$

(ii) 만의 자릿 수가 4인 경우

일의 자리에 0 또는 2가 오면 되고 그 경우의 수는 2

그 각각의 경우에 천, 백, 십의 자리에는 일의 자리에 사용된 숫자를 제외하고 나머지 숫자 3개를 배열하면 되고 그 경우의 수는 $3!$

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2\times3!=2\times6=12$

(i), (ii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$18+12=30$

답 ④

**06** A 영역에는 4가지 색 중 하나를 칠하면 되고 그 경우의 수는 4

이때 D 영역에 A 영역과 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 두 가지 경우가 있다.

(i) D 영역에 A 영역과 같은 색을 칠하는 경우

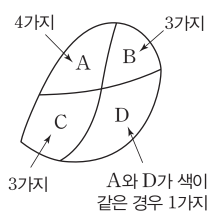
D 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 1

B 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 3

C 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 3

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4\times1\times3\times3=36$




(ii) D 영역에 A 영역과 다른 색을 칠하는 경우

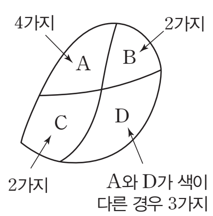
D 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 A 영역에 칠한 색과 다른 색을 칠해야 하므로 3

B 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 인접한 A 영역, D 영역과 다른 색을 칠해야 하므로 2

C 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 인접한 A 영역, D 영역과 다른 색을 칠해야 하므로 2

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4\times3\times2\times2=48$




(i), (ii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$36+48=84$

답 ④

**07** $a$로 시작하는 배열의 개수는 2, 3, 4, 5번째 자리에 $b$, $c$, $d$, $e$를 배열하는 경우의 수와 같으므로

$4!=4\times3\times2\times1=24$

$b$로 시작하는 배열의 개수도 마찬가지로 하면 24

$c$로 시작하는 배열의 개수도 마찬가지로 하면 24

$d$로 시작하는 배열의 개수도 마찬가지로 하면 24

$24+24+24+24=96$

이고 $d$로 시작하는 배열이 끝나고 $e$로 시작하는 배열이 나오므로 100번째 오는 배열은 $e$로 시작하는 4번째 배열이다.

97번째 배열 — $eabcd$

98번째 배열 — $eabdc$

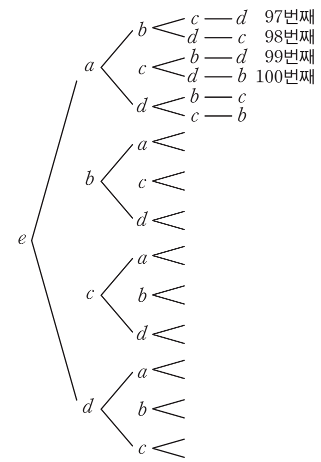
99번째 배열 — $eacbd$

100번째 배열 — $eacdb$

답 ④

|참고|

그림처럼 수형도를 이용하면 실수하지 않고 쉽게 순서와 경우의 수를 구할 수 있다.




**08** 남학생 2명과 여학생 2명을 일렬로 먼저 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

이때 교사끼리 이웃하지 않으려면 남학생과 여학생 사이의 공간 3곳과 양 끝 공간 2곳 중에 교사들은 한 명씩 들어가야 한다.

공간을 정하는 경우의 수는

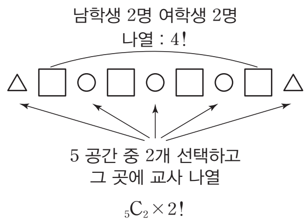
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

정한 공간에 교사를 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$24\times10\times2=480$




답 ④

**09** $_nP_r={_nC_r}\times r!$이므로 조건 (가), (나)에서

$210=35\times r!$, $r!=6$

$3!=3\times2\times1=6$에서

$r=3$

$_nP_3=n(n-1)(n-2)=210$에서

$210=7\times6\times5$이므로 $n=7$

따라서 $n+r=7+3=10$

답 ③

**10** 10개의 숫자 중에서 5개의 숫자로 비밀번호를 정할 때, 순서에 상관없이 결정되므로 설정하는 경우의 수는

$${_{10}C_5}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

답 ②

**11** 키가 모두 다른 6명 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

$${_6C_3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이때 선택된 3명을 키가 큰 순서대로 한 줄로 세우는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$20\times1=20$

답 ②

|참고|

선택된 3명을 키와 상관없이 나열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

이지만 키가 모두 다른 3명을 키가 큰 순서대로 나열하는 경우의 수는 1이다.

**12** 가로로 놓여있는 4개의 평행선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${_4C_2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

이고 각각의 경우에 사선으로 놓여 있는 5개의 평행선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${_5C_2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

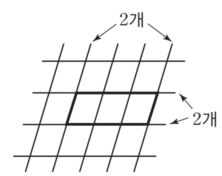
따라서 구하는 평행사변형의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times10=60$

답 ④

|참고|

주어진 그림에서 만들어질 수 있는 평행사변형은 가로로 놓여 있는 평행선 중 2개, 사선으로 놓혀 있는 평행선 중 2개로 이루어진다.




**13** 8개의 서로 다른 점 중에서 직선 위의 점이 되도록 2개의 점을 선택하는 경우의 수는

$${_8C_2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

여기서 왼쪽 사선으로 놓인 변 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 선택하는 경우는 모두 같은 직선 위의 점이 되므로 빼 주어야 하고 그 경우의 수는

$${_4C_2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

마찬가지로 아래 가로로 놓인 변 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 선택하는 경우도 모두 같은 직선 위의 점이 되므로 빼 주어야 하고 그 경우의 수는

$${_4C_2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

또 오른쪽 사선으로 놓인 변 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 선택하는 경우도 모두 같은 직선 위의 점이 되므로 빼 주어야 하고 그 경우의 수는

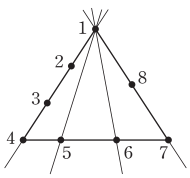
$${_3C_2}=\frac{3\times2}{2\times1}=3$$

그런데 이렇게 빼면 실제 삼각형을 이루는 변을 포함하는 직선이 모두 빠지게 되므로 세 개의 직선은 더해주어야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는

$28-(6+6+3)+3=16$

답 ①

|다른 풀이|
그림의 1번부터 8번의 각 점에서 그을 수 있는 직선을 모두 센다. 단 중복이 되지 않게 센다.
1번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 4
2번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 4
3번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 4
4번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 2
5번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 1
6번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 1
7번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 0
8번 점에서 그을 수 있는 직선의 수는 0
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$4+4+4+2+1+1=16$




**14** 다섯 곳의 여행지 A, B, C, D, E 중에서 먼저 철수와 영희의 공통 여행지를 한 곳 정하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
이 각각의 대하여 공통 여행지를 제외한 나머지 네 곳의 여행지 중 철수가 택할 여행지 두 곳을 정하는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
이 경우 남아 있는 여행지는 두 곳 뿐이고 이 여행지를 영희가 선택하는 경우의 수는
${}_2C_2=1$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times6\times1=30$

답 ③

## 서술형 유제

본문 69쪽

**출제의도**

조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

**풀이**

(1) 20 이하의 자연수 20개의 수 중에서 세 개의 수를 뽑을 때 가장 큰 수가 10이어야 하므로 10은 뽑은 세 개의 수 중에 포함되어야 한다. ❶
가장 큰 수가 10이므로 1부터 9까지의 9개의 수 중에서 나머지 2개의 수를 뽑으면 된다. 그 경우의 수는
${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$ ❷

(2) 가장 큰 수가 $a$이므로 $a$는 뽑아야 하고 ❶
1, 2, $\cdots$, $a-1$의 $(a-1)$개의 수 중에서 두 개의 수를 뽑는 경우의 수가 15이어야 하므로
${}_{a-1}C_2=\frac{(a-1)\times(a-2)}{2\times1}=15$ ❷
에서 $(a-1)(a-2)=30$
연속한 두 자연수의 곱이 $30=6\times5$가 되려면
$a-1=6$
즉, $a=7$ ❸

답 (1) 36 (2) 7

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 10은 이미 뽑은 수 중에 포함되어야 함을 식 또는 글로 표현한 경우 | 10% |
| ❷ | 1부터 9까지의 9개의 수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수를 구한 경우 | 30% |

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | $a$는 이미 뽑은 수 중에 포함되어야 함을 식 또는 글로 표현한 경우 | 10% |
| ❷ | 1부터 $a-1$까지의 $(a-1)$개의 수 중에서 두 개를 뽑는 경우의 수를 구하는 식과 그 값이 15임을 표현한 경우 | 30% |
| ❸ | $a$의 값을 구한 경우 | 20% |

# 10 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

유제 본문 70~72쪽

**1.** ② **2.** $-\frac{8}{5}$ **3.** 7 **4.** ⑤

**5.** (1) $-1$ (2) $-3$ **6.** $\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$

**1** ① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$는 $2\times1$행렬이다.

② $(3\ \ 4)$는 $1\times2$행렬이다.

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$는 $3\times2$행렬이다.

④ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$은 $2\times3$행렬이다.

⑤ $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$는 $2\times2$행렬이다.

답 ②

**2** $\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y & x+2y \\ 0 & -3x-4 \end{pmatrix}$에서

$x+2=-x+y$, 즉

$2x-y=-2$ …… ㉠

$-2=x+2y$, 즉

$x+2y=-2$ …… ㉡

$x-2y=-3x-4$, 즉 $4x-2y=-4$

양변을 2로 나누어 정리하면 $2x-y=-2$

이것은 ㉠과 일치한다.

이때 ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{6}{5}$, $y=-\frac{2}{5}$

$\therefore x+y=-\frac{8}{5}$

답 $-\frac{8}{5}$

**3** 행렬 $A$는 $3\times2$행렬이므로

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$라 하면

$a_{11}=1^2-1+1=1$, $a_{12}=1^2-2+1=0$

$a_{21}=2^2-1+1=4$, $a_{22}=2^2-2+1=3$

$a_{31}=3^2-1+1=9$, $a_{32}=3^2-2+1=8$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$이고 제2행의 모든 성분의 합은

$4+3=7$

답 7

**4** 행렬 $A$는 이차정사각행렬이므로

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 하면

$a_{11}=1\times1^2=1$, $a_{12}=1\times2^2=4$

$a_{21}=2\times1^2=2$, $a_{22}=2\times2^2=8$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$이고 모든 성분의 합은

$1+4+2+8=15$

답 ⑤

**5** (1) $A+2B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$2+(-6)+3+0=-1$

(2) $3A-2B=3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3A-2B$의 모든 성분의 합은

$-10+6+(-7)+8=-3$

답 (1) $-1$ (2) $-3$

|다른 풀이|

행렬 $A$의 모든 성분의 합은 $-1$, 행렬 $B$의 모든 성분의 합은 0이므로

(1) 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$(-1)+2\times0=-1$

(2) 행렬 $3A-2B$의 모든 성분의 합은

$3\times(-1)-2\times0=-3$

**6** $2(X+A)=X-(A+B)$에서

$2X+2A=X-A-B$

$X=-3A-B$

$=-3\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-8\\-6&-13\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}-2&-8\\-6&-13\end{pmatrix}$

## 기본 핵심 문제

본문 73쪽

| 01 ③ | 02 ⑤ | 03 ② | 04 ② | 05 ③ |
|---|---|---|---|---|

**01** 행렬 $(1\quad 2\quad 3)$은 $1\times3$행렬이므로 $m=1$, $n=3$

행렬 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$은 $2\times1$행렬이므로 $p=2$, $q=1$

따라서 $mn^2+p^2q=1\times3^2+2^2\times1=13$

답 ③

**02** 행렬 $A=(a_{ij})$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2)$에 대하여

$a_{ij}=\begin{cases}ij & (i\neq j)\\ i+j & (i=j)\end{cases}$

에서 행렬 $A$는 $3\times2$행렬이고

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$라 하면

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1\times2=2$

$a_{21}=2\times1=2$, $a_{22}=2+2=4$

$a_{31}=3\times1=3$, $a_{32}=3\times2=6$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}$이고 구하는 모든 성분의 합은

$2+2+2+4+3+6=19$

답 ⑤

**03** $2A-3B=O$에서

$2\begin{pmatrix}a&-3\\6&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2&-2\\4&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a+6&0\\0&6-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$2a+6=0$, $6-3b=0$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로 $a+b=-1$

답 ②

**04** $A+X=4X-2B$에서

$-3X=-A-2B$

$X=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&3\\1&-3\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&2\\-\frac{4}{3}&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬 $X$의 모든 성분의 합은

$1+3+(-1)+(-1)=2$

답 ②

|다른 풀이|

행렬 $A$의 모든 성분의 합은 2

행렬 $B$의 모든 성분의 합은 2

행렬 $X$의 모든 성분의 합을 $x$라 놓으면

$A+X=4X-2B$에서

$2+x=4x-2\times2$

$-3x=-6$, $x=2$

따라서 구하는 행렬 $X$의 모든 성분의 합은 2이다.

**05** $2A-B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$A+2B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&4\end{pmatrix}$ ...... ㉡

에 대하여 ㉠의 양변을 2배하면

$4A-2B=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$ ...... ㉢

㉡+㉢을 하면

$5A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\7&12\end{pmatrix}$

$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&6\\7&12\end{pmatrix}$

ㄴ의 양변을 2배하면

$2A+4B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ ······ ㄹ

ㄹ−ㄱ을 하면

$5B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 $a=\frac{1}{5}(1+6+7+12)=\frac{26}{5}$

$b=\frac{1}{5}\{-3+2+(-1)+4\}=\frac{2}{5}$

$\therefore a-3b=\frac{26}{5}-3\times\frac{2}{5}=4$

답 ③

# 11 행렬의 곱셈

**유제** 본문 74~76쪽

**1.** (1) $\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $(-2 \quad 4)$

**2.** $AB=(11)$, $BA=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **3.** 1025

**4.** ① **5.** 2 **6.** 40

**1** (1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\times(-1)+(-3)\times3 & 4\times2+(-3)\times1 \\ 2\times(-1)+(-1)\times3 & 2\times2+(-1)\times1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $(1 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=(1\times4+2\times(-3) \quad 1\times2+2\times1)$

$=(-2 \quad 4)$

답 (1) $\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $(-2 \quad 4)$

**2** $AB=(1 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times4)=(11)$

$BA=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}(1 \quad 2)=\begin{pmatrix} 3\times1 & 3\times2 \\ 4\times1 & 4\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

답 $AB=(11)$, $BA=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

|참고|

행렬 $A$는 $1\times2$행렬, 행렬 $B$는 $2\times1$행렬

$AB$는 $1\times2$행렬과 $2\times1$행렬의 곱이므로 $1\times1$행렬, $BA$는 $2\times1$행렬과 $1\times2$행렬의 곱이므로 $2\times2$행렬이 된다.

**3** 행렬 $A$는 $2\times2$행렬이므로

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 하면

$a_{11}=1-2\times1=-1$, $a_{12}=0$

$a_{21}=0$, $a_{22}=2-2\times2=-2$

즉, $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$이고

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$

$\cdots$

$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

따라서 $A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1024\end{pmatrix}$이고 모든 성분의 합은

$1+0+0+1024=1025$

답 1025

|참고|

이차정사각행렬에서 왼쪽 위에서 오른쪽 아래의 대각선 성분 이외의 성분이 모두 0인 경우 행렬의 거듭제곱을 아래와 같이 쉽게 구할 수 있다.

$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

**4** $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$A^3=A^2A=EA=A$

$A^4=A^3A=AA=A^2=E$

$\cdots$

따라서 $A^n$은 $n$이 홀수인 경우 $A$, $n$이 짝수인 경우 $E$임을 추론할 수 있다.

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=A+E+A+E+\cdots+A+E$

$=5A+5E$

$=5\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$5+5+5+5=20$

답 ①

**5** $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A(A-B)-B(A-B)$

$=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은

$-3+4+(-4)+5=2$

답 2

**6** $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A(A+B)+B(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$ ······ ㉠

$(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A(A-B)-B(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$ ······ ㉡

㉠－㉡을 하면

$(A+B)^2-(A-B)^2=2AB+2BA$

$\begin{pmatrix}29 & 36\\ 45 & 56\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 9 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 16\end{pmatrix}+2BA$

$\begin{pmatrix}28 & 36\\ 36 & 52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 16\\ 16 & 32\end{pmatrix}+2BA$

$\begin{pmatrix}20 & 20\\ 20 & 20\end{pmatrix}=2BA$

따라서 $BA=\begin{pmatrix}10 & 10\\ 10 & 10\end{pmatrix}$이고 구하는 모든 성분의 합은

$10+10+10+10=40$

답 40

## 기본 핵심 문제

본문 77쪽

| 01 ④ | 02 ② | 03 ⑤ | 04 ③ | 05 ④ |
|---|---|---|---|---|

**01** 행렬 $A$는 $2\times2$행렬, 행렬 $B$는 $1\times2$행렬, 행렬 $C$는 $2\times1$행렬이므로

① $BA$는 $1\times2$행렬과 $2\times2$행렬의 곱이므로 정의된다.

② $AC$는 $2\times2$행렬과 $2\times1$행렬의 곱이므로 정의된다.

③ $BC$는 $1\times2$행렬과 $2\times1$행렬의 곱이므로 정의된다.

④ $CA$는 $2\times1$행렬과 $2\times2$행렬의 곱이므로 정의되지 않는다.

⑤ $CB$는 $2\times1$행렬과 $1\times2$행렬의 곱이므로 정의된다.

답 ④

**02** $AB-BA$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-2 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 7\\2 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & -6\\-4 & 4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-4+(-6)+(-4)+4=-10$

답 ②

**03** $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$이고

$\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$

$\cdots$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{n}{2} & 1\end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

따라서 $A^n=2^n\begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{n}{2} & 1\end{pmatrix}$에서

$A^{10}=2^{10}\begin{pmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{pmatrix}$이므로 $a=5$

답 ⑤

**| 참고 |**

자연수 $n$에 대하여

$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}$

**04** $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$

$A^4=A^3A=EA=A$

$A^5=A^4A=AA=A^2$

$A^6=A^5A=A^2A=A^3=E$

$\cdots$

따라서 $A^n$은 자연수 $n$이 1씩 커지면서 $A$, $A^2$, $E$가 반복적으로 나오는 것을 추론할 수 있다.

$A^{100}=A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}$

이고 구하는 모든 성분의 합은

$1+1+(-3)+(-2)=-3$

답 ③

**| 다른 풀이 |**

$A^3=E$이므로

$A^{100}=(A^3)^{33}A=E^{33}A=EA=A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$1+1+(-3)+(-2)=-3$

**05** 조건 (가)에서

$A^3=A^5=E$이므로

$A^5=A^3A^2=EA^2=A^2=E$이고

$A^3=A^2A=EA=A=E$

이때 조건 (나)에서

$A^2-B^2=O$이므로

$E^2-B^2=O$, $B^2=E$

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이므로 $B$가 될 수 있다.

② $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이므로 $B$가 될 수 있다.

③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이므로 $B$가 될 수 있다.

④ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

이므로 $B$가 될 수 없다.

⑤ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이므로 $B$가 될 수 있다.

답 ④

|참고|

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=E$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=-E$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2=-E$

## 단원 종합 문제

본문 78~80쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ④ | 02 ④ | 03 ② | 04 ⑤ | 05 ④ |
| 06 ④ | 07 ② | 08 ③ | 09 ② | 10 ③ |
| 11 ① | 12 ④ | 13 ④ | 14 ② | |

**01** $\begin{pmatrix} 2 & x+4 \\ -2 & 2-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y & -x+2y \\ x-y & x-4 \end{pmatrix}$에서

(1, 1)성분에서 $2=-x+y$, $x-y=-2$ …… ㉠

(1, 2)성분에서 $x+4=-x+2y$, $x-y=-2$

(2, 1)성분에서 $-2=x-y$, $x-y=-2$

(2, 2)성분에서 $2-y=x-4$, $x+y=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=4$

따라서 $xy=8$

답 ④

**02** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$에서 $nA=\begin{pmatrix} n & n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$이므로

모든 성분의 합은

$n+n+2n+2n=6n$

$B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$에서 $-10B=\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}$이므로

모든 성분의 합은

$10+20+30+40=100$

$6n>100$, $n>\frac{100}{6}=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$이므로

구하는 자연수 $n$의 최솟값은 17이다.

답 ④

|다른 풀이|

행렬 $A$의 성분의 합은 6이므로 행렬 $nA$의 성분의 합은 $6n$이고 행렬 $B$의 성분의 합은 $-10$이므로 행렬 $-10B$의 성분의 합은 $-10\times(-10)=100$

따라서 $6n>100$에서 만족하는 자연수 $n$의 최솟값은 17이다.

**03** $2(X+A)=X-A+B$에서

$2X+2A=X-A+B$

$X=-3A+B$

$=-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬 $X$의 모든 성분의 합은

$-3+8+(-7)+(-6)=-8$

답 ②

|다른 풀이|

행렬 $A$의 모든 성분의 합은 4, 행렬 $B$의 모든 성분의 합은 4이고 행렬 $X$의 모든 성분의 합을 $x$라 하면

$2(X+A)=X-A+B$에서

$2(x+4)=x-4+4$, $x=-8$

따라서 구하는 행렬 $X$의 모든 성분의 합은 $-8$이다.

**04** 이차정사각행렬 $A$를

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 놓으면

$a_{11}=1+2\times1=3$, $a_{12}=1+2\times2=5$

$a_{21}=2+2\times1=4$, $a_{22}=2+2\times2=6$

에서 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$이고 구하는 모든 성분의 합은

$3+5+4+6=18$

답 ⑤

**05** $2\times3$행렬 $A$를

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$이라 놓으면

$a_{11}=1\times1=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=3$

$a_{21}=2^2=4$, $a_{22}=2\times2=4$, $a_{23}=3$

이므로 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 $2A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은

$2+4+6+8+8+6=34$

답 ④

**06** $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

이것을 ㉠에 대입하면

$A+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 $a=0+(-1)+2+6=7$

$b=1+(-1)+(-1)+3=2$

$\therefore ab=14$

답 ④

**07** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & x \\ y & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=O$에서

$\begin{pmatrix} -x+2y & x+2y \\ -2x+4y & 2x+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$-x+2y=-1$, $x+2y=0$

$-2x+4y=-2$, $2x+4y=0$

위의 네 식을 정리하면

$x-2y=1$ …… ㉠

$x+2y=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{4}$

따라서 $xy=-\frac{1}{8}$

답 ②

**08** $ABC=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-6+0+10+2=6$

답 ③

|참고|

곱셈이 정의되는 세 행렬 $A$, $B$, $C$에 대하여

$(AB)C=A(BC)$

이 항상 성립하므로 괄호를 생략할 수 있다.

즉, $(AB)C=A(BC)=ABC$

**09** $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A$

$A^4=A^3A=(-A)A=-A^2=-(-E)=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

…

즉, $A^n$은 자연수 $n$이 1씩 커지면서 $A$, $-E$, $-A$, $E$가 반복적으로 나오는 것을 추론할 수 있다.

따라서 $A^{100}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고 구하는 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

답 ②

| 다른 풀이 |

$A^2=-E$이므로

$A^{100}=(A^2)^{50}=(-E)^{50}=E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 2이다.

**10** $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$pA+qE=p\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2p+q & p \\ -4p & -p+q \end{pmatrix}$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡의 각 성분을 비교하면

$p=-1$, $q=-2$

따라서 $p+q=-3$

답 ③

**11** 행렬 $A$가 이차정사각행렬이므로

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 놓으면

$a_{11}=0$, $a_{12}=-1$

$a_{21}=1$, $a_{22}=0$

즉, $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이고

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A$

$A^4=A^3A=(-A)A=-A^2=-(-E)=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

…

이때 $A^n$은 자연수 $n$이 1씩 커지면서 $A$, $-E$, $-A$, $E$가 반복적으로 나오는 것을 추론할 수 있다.

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=(A-E-A+E)+(A-E-A+E)+A-E$

$=A-E$

$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-1+(-1)+1+(-1)=-2$

답 ①

**12** ① $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A(A+B)+B(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

$\neq A^2+2AB+B^2$

따라서 항상 성립하는 것은 아니다.

② $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A(A-B)-B(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$

$\neq A^2-2AB+B^2$

따라서 항상 성립하는 것은 아니다.

③ $(A+B)(A-B)=A(A-B)+B(A-B)$

$=A^2-AB+BA-B^2$

$\neq A^2-B^2$

따라서 항상 성립하는 것은 아니다.

④ $(A+E)(A^2-A+E)$

$=A(A^2-A+E)+E(A^2-A+E)$

$=A^3-A^2+A+A^2-A+E$

$=A^3+E$

따라서 항상 성립한다.

⑤ $(AB)^2=ABAB\neq AABB=A^2B^2$

따라서 항상 성립하는 것은 아니다.

답 ④

**13** $A+B=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 $A$를 곱하면

$A^2+AB=A$ …… ㉠

$A+B=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 $A$를 곱하면

$A^2+BA=A$ …… ㉡

㉠, ㉡을 비교하면 $AB=BA$ …… (∗)

가 성립함을 알 수 있다.

$BA^3=BAAA$
$=ABAA$ ((＊)가 성립하므로)
$=BAA$ (조건 (나))
$=ABA$ ((＊)가 성립하므로)
$=BA$ (조건 (나))
$=AB$ ((＊)가 성립하므로)
$=B$ (조건 (나))

답 ④

**14** (올해 제품 P의 사용자 수)×0.6
+(올해 제품 Q의 사용자 수)×0.2
가 (1년 후 제품 P의 사용자 수)이고
(올해 제품 P의 사용자 수)×0.4
+(올해 제품 Q의 사용자 수)×0.8
이 (1년 후 제품 Q의 사용자 수)이므로
위의 식과 같은 곱셈과 덧셈이 나오게 하려면
행렬 $CA$를 생각해야 한다. 즉

$CA$
$=\begin{pmatrix} 2000 & 1000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2000\times0.6+1000\times0.2 & 2000\times0.4+1000\times0.8 \end{pmatrix}$

여기서 행렬 $CA$의 제1열은 1년 후의 제품 P의 사용자 수, 제2열은 1년 후의 제품 Q의 사용자 수를 나타냄을 알 수 있다.
구하는 것은 2년 후의 제품 Q의 사용자 수이고
$(CA)A=CA^2$이므로 행렬 $CA^2$의 제2열을 구하면 된다.

답 ②

## 서술형 유제

본문 81쪽

**출제의도**

행렬의 성분에 대한 식으로부터 행렬을 구하고 행렬의 거듭제곱에서 규칙성을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 놓으면 주어진 식으로부터

$a_{11}=0,\ a_{12}=-1$
$a_{21}=-1,\ a_{22}=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ······ ❶

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$
$A^3=A^2A=EA=A$
$A^4=A^3A=AA=A^2=E$
$\cdots$

위의 과정에서 행렬 $A^n$은 자연수 $n$이 1씩 커지면서 $A$, $E$가 반복적으로 나오는 것을 추론할 수 있다. ······ ❷

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$
$=A+E+A+E+\cdots+A+E$
$=5A+5E$
$=5\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은
$5+(-5)+(-5)+5=0$ ······ ❸

답 0

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 행렬 $A$의 성분을 구한 경우 | 30% |
| ❷ | 행렬 $A$를 거듭제곱 하여 규칙성을 발견한 경우 | 30% |
| ❸ | 주어진 행렬의 성분을 구한 후 성분의 합을 구한 경우 | 40% |

# 12 평면좌표

유제 본문 84~86쪽

| | | |
|---|---|---|
| **1.** ③ | **2.** ③ | **3.** (1) 10 (2) $(3,\ -2)$ |
| **4.** $-7$ | **5.** $-2$ | **6.** 18 |

**1** 두 점 $A(a,\ -1)$, $B(3,\ 3)$에 대하여 $\overline{AB}=5$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3-a)^2+\{3-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+25}=5$

양변을 제곱하면

$a^2-6a+25=25$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

답 ③

**2** 두 점 $A(1,\ -1)$, $B(4,\ 2)$와 점 $P(0,\ a)$에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(0-1)^2+\{a-(-1)\}^2}=\sqrt{(0-4)^2+(a-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+2a+2=a^2-4a+20$

$6a=18$, $a=3$

답 ③

**3** (1) 구하는 점 P의 좌표를 $p$라 놓으면

$p=\dfrac{2\times18+1\times(-6)}{2+1}=\dfrac{30}{3}=10$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 10

(2) 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$x=\dfrac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}=\dfrac{15}{5}=3$

$y=\dfrac{3\times(-4)+2\times1}{3+2}=\dfrac{-10}{5}=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ -2)$

답 (1) 10 (2) $(3,\ -2)$

**4** 두 점 $A(-1,\ -2)$, $B(a,\ 7)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $5:4$로 내분하는 점의 좌표가 $(-6,\ b)$이므로

$-6=\dfrac{5\times a+4\times(-1)}{5+4}=\dfrac{5a-4}{9}$에서

$-54=5a-4$, $5a=-50$

$a=-10$

$b=\dfrac{5\times7+4\times(-2)}{5+4}=\dfrac{27}{9}=3$

따라서 $a+b=-7$

답 $-7$

**5** 세 점 $A(3,\ 2)$, $B(4,\ -1)$, $C(a,\ 5)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(1,\ b)$이므로

$1=\dfrac{3+4+a}{3}$에서 $3=7+a$, $a=-4$

$b=\dfrac{2+(-1)+5}{3}=\dfrac{6}{3}=2$

따라서 $a+b=-2$

답 $-2$

**6** 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

즉, $\left(\dfrac{0+3}{2},\ \dfrac{7+b}{2}\right)=\left(\dfrac{a+6}{2},\ \dfrac{2+(-1)}{2}\right)$

$3=a+6$에서 $a=-3$

$7+b=1$에서 $b=-6$

따라서 $ab=18$

답 18

## 기본 핵심 문제

본문 87쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ③ | **02** ② | **03** ③ | **04** ② | **05** ③ |

**01** 점 P는 $x$축 위에 있으므로 $b=0$이고 $P(a,\ 0)$

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+\{0-(-4)\}^2}=\sqrt{(a-8)^2+(0-8)^2}$

$\sqrt{a^2-8a+32}=\sqrt{a^2-16a+128}$

양변을 제곱하면

$a^2-8a+32=a^2-16a+128$

$8a=96$, $a=12$

따라서 $a+b=12$

답 ③

**02** $\overline{AB}=\sqrt{(5-0)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-5)^2+\{4-(-3)\}^2}=\sqrt{50}$

$\overline{CA}=\sqrt{(0-4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

**03** 점 P가 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하므로

$$P\left(\frac{3\times(-1)+2\times a}{3+2}, \frac{3\times(-8)+2\times 2}{3+2}\right)$$

$$P\left(\frac{2a-3}{5}, -4\right)$$

또한 점 P가 $y$축 위에 있으므로 $b=0$이고 $P(0, c)$

즉, $2a-3=0$, $c=-4$에서

$a=\frac{3}{2}$, $c=-4$

따라서 $ac+b=\frac{3}{2}\times(-4)+0=-6$

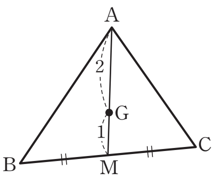
답 ③

**04** 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 $G(a, b)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{2\times1+1\times4}{2+1}=2$

$b=\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}=-1$

따라서 $ab=-2$




답 ②

**05** 사각형 OABC가 마름모이므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BO}$의 중점은 일치한다.

즉, $\left(\frac{4+4}{2}, \frac{3+b}{2}\right)=\left(\frac{8+0}{2}, \frac{a+0}{2}\right)$

$a=b+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CO}$이므로

$\overline{OA}=\overline{AB}$에서

$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{(8-4)^2+(a-3)^2}$

양변을 제곱하면

$25=16+a^2-6a+9$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$

$a=0$ 또는 $a=6$

$\overline{OA}=\overline{OC}$에서

$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{4^2+b^2}$

양변을 제곱하면

$25=16+b^2$, $b^2=9$

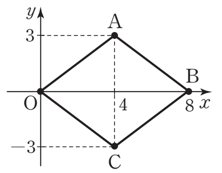
$b=3$ 또는 $b=-3$

이때 $b=3$이면 점 A와 점 C가 일치하게 되므로

$b=-3$

㉠에 대입하면 $a=0$

따라서 $a+b=-3$




답 ③

## 13 직선의 방정식

**유제** 본문 88~90쪽

**1.** 5 **2.** ①

**3.** (1) $y=2x+1$ (2) $y=\frac{3}{2}x-3$ **4.** $-9$

**5.** (1) $\sqrt{10}$ (2) 2 **6.** 1

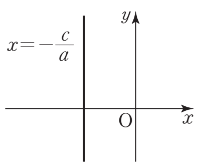
**1** $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $ac>0$이므로 $a\neq0$이고 $b=0$

$ax+by+c=0$은 $ax+c=0$

$x=-\frac{c}{a}$

이때 $ac>0$이므로 직선 $x=-\frac{c}{a}$는 제2사분면과 제3사분면을 지난다.




따라서 $k=2$ 또는 $k=3$이고 구하는 모든 $k$의 값들의 합은 5이다.

답 5

**2** $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ...... (*)

$ab>0$에서 (*)가 나타내는 직선의 기울기는 음수 ...... ㉠

$bc<0$에서 (*)가 나타내는 직선의 $y$절편은 양수 ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 ①과 같다.

답 ①

**3** (1) 직선 $y=2x-1$에 평행하므로 기울기는 2이고 점 $(1, 3)$을 지나므로

$y-3=2(x-1)$

이것을 정리하면 $y=2x+1$

(2) $2x+3y-1=0$을 정리하면 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$이고

이 직선에 수직이므로 기울기는 $\frac{3}{2}$이고 점 $(2, 0)$을 지나므로

$y=\frac{3}{2}(x-2)$

이것은 정리하면 $y=\frac{3}{2}x-3$

답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=\frac{3}{2}x-3$

**참고**

기울기가 $m$이고 점 $(x_1, y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

**4** 두 점 $(2, 5)$, $(4, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-5}{4-2}=-3$

이고 이 직선에 평행한 직선의 기울기도 $-3$이므로

직선의 방정식을 $y=-3x+p$라 할 때

$x$절편이 1이므로 점 $(1, 0)$을 지난다.

즉, $0=-3\times1+p$, $p=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=-3x+3$

이것이 $ax-y+b=0$과 일치해야 하므로

$a=-3$, $b=3$

따라서 $ab=-3\times3=-9$

답 $-9$

**5** (1) $y=3x$는 $3x-y=0$이고 이 직선과 점 $(4, 2)$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times4+(-1)\times2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

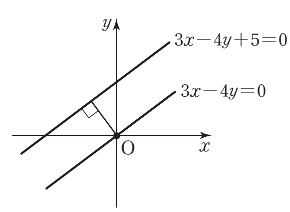
(2) 원점과 직선 $3x-4y+10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times0+(-4)\times0+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) 2

**6** 두 직선 $3x-4y+5=0$, $3x-4y=0$은 서로 평행하고 직선 $3x-4y=0$은 원점을 지나므로 구하는 평행한 두 직선 사이의 거리는 원점과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같고 그 거리는

$$\frac{|3\times0+(-4)\times0+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$




답 1

## 기본 핵심 문제

본문 91쪽

01 ④ 02 ① 03 ③ 04 ④ 05 ④

**01** $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이고

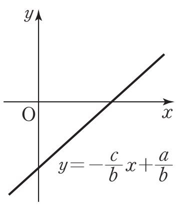
그림에서 기울기는 양수이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $ab<0$

또 그림에서 $y$절편은 양수이므로 $-\frac{c}{b}>0$, $bc<0$

$cx+by-a=0$을 정리하면 $y=-\frac{c}{b}x+\frac{a}{b}$ ...... (*)

따라서 (*)가 나타내는 직선의 기울기는 양수이고 $y$절편은 음수이다.

그러므로 이 직선의 개형은 다음과 같고 이 직선은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.




따라서 $k=1$ 또는 $k=3$ 또는 $k=4$이고 구하는 $k$의 값들의 합은

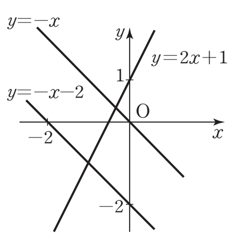
$1+3+4=8$

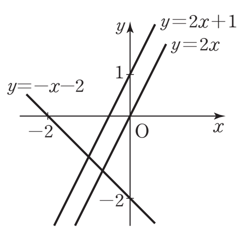
답 ④

**02** 세 직선 $y=2x+1$, $y=-x-2$, $y=mx$ 중 어느 두 직선이 만나는 서로 다른 점의 개수의 총합이 2가 되려면 두 개의 직선은 서로 평행해야하므로

$m=2$ 또는 $m=-1$

따라서 구하는 $m$의 값의 합은 1




답 ①

**03** 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+(-6)}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$이고

직선 AB의 기울기는

$\frac{-6-6}{5-1}=-3$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이고

점 $(3, 0)$을 지나므로

$y=\frac{1}{3}(x-3)$, $y=\frac{1}{3}x-1$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=\frac{1}{3}a-1$, $\frac{1}{3}a=2$

따라서 $a=6$

답 ③

**04** 점 $(1, -2)$와 직선 $6x-8y+k=0$ 사이의 거리가 3이므로

$3=\frac{|6\times1-8\times(-2)+k|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}$

$3=\frac{|k+22|}{10}$, $|k+22|=30$

$k+22=\pm30$

따라서 $k=8$ 또는 $k=-52$

이때 $k$는 양수이므로 $k=8$

답 ④

**05** 조건 (가)에서 직선 $l'$과 직선 $l: 2x+y-3=0$은 서로 평행하므로 직선 $l'$의 방정식을

$2x+y+k=0$ ($k$는 상수)

로 놓으면 조건 (나)에서 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2\times1+2+k=0$에서 $k=-4$

즉 $l': 2x+y-4=0$

직선 $l'$의 $y$절편을 구하기 위해 $x=0$을 대입하면

$y=4$

따라서 $y$절편은 4이다.

답 ④

# 14 원의 방정식

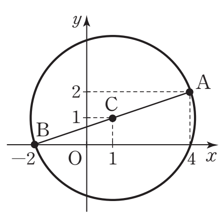
**유제** 본문 92~96쪽

**1.** (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ (2) $x^2+y^2=8$
**2.** $(x-1)^2+(y-1)^2=10$ **3.** 15 **4.** 19
**5.** (1) $(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ (2) $(x+2)^2+(y+1)^2=2^2$
**6.** $(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$ **7.** $-3\sqrt{5}<a<3\sqrt{5}$ **8.** 5
**9.** (1) $y=-x\pm3\sqrt{2}$ (2) $2x-\sqrt{5}y=9$ **10.** 3

**1** (1) 중심이 $(-2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2이므로
$(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$
(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이를 $r$이라 하면
$x^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로
$(-2)^2+2^2=r^2$, $r^2=8$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2=8$

답 (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ (2) $x^2+y^2=8$

**2** 두 점 $A(4,\ 2)$, $B(-2,\ 0)$에 대하여
선분 AB의 중점을 C라 하면 좌표는
$C\left(\dfrac{4+(-2)}{2},\ \dfrac{2+0}{2}\right)$, 즉 $C(1,\ 1)$
구하는 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}$와 같고
$\overline{AC}=\sqrt{(1-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-1)^2=10$




답 $(x-1)^2+(y-1)^2=10$

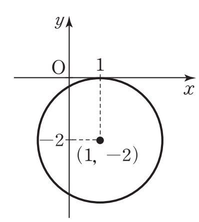
**3** $x^2+y^2-8x+10y+a=0$에서
$(x^2-8x)+(y^2+10y)=-a$
$(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25)=-a+16+25$
$(x-4)^2+(y+5)^2=41-a$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(4,\ -5)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{41-a}$이므로
$p=4$, $q=-5$
$\sqrt{41-a}=5$에서 $41-a=25$, $a=16$
따라서 $a+p+q=16+4+(-5)=15$

답 15

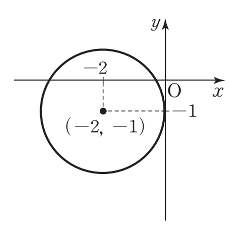
**4** $x^2+y^2-4x+8y+k=0$에서
$(x^2-4x)+(y^2+8y)=-k$
$(x^2-4x+4)+(y^2+8y+16)=-k+4+16$
$(x-2)^2+(y+4)^2=20-k$
따라서 원을 나타내려면 $20-k>0$
$k<20$
따라서 구하는 자연수 $k$의 최댓값은 19이다.

답 19

**5** (1) 중심이 $(1,\ -2)$이고 $x$축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

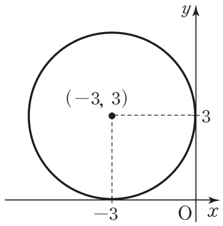



(2) 중심이 $(-2,\ -1)$이고 $y$축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로
$(x+2)^2+(y+1)^2=2^2$




답 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ (2) $(x+2)^2+(y+1)^2=2^2$

**6** 반지름의 길이가 3, 원의 중심이 제2사분면에 있고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원의 중심은 $(-3,\ 3)$이므로 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$




답 $(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$

**7** 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+a$

즉, $2x-y+a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times0+(-1)\times0+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|a|}{\sqrt{5}}<3,\ |a|<3\sqrt{5}$

따라서 $-3\sqrt{5}<a<3\sqrt{5}$

답 $-3\sqrt{5}<a<3\sqrt{5}$

**8** 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times1+4\times(-2)-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{30}{5}=6$$

원의 반지름의 길이는 $r$이므로 직선과 원이 만나지 않으려면

$r<6$

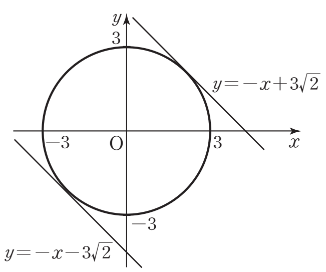
따라서 자연수 $r$의 최댓값은 5이다.

답 5

**9** (1) 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이고 구하는 접선의 기울기는 $-1$이므로 접선의 방정식은

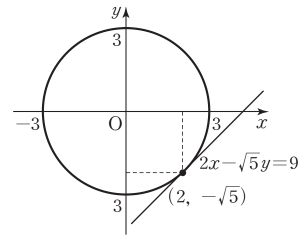
$y=-x\pm3\sqrt{(-1)^2+1}$

즉, $y=-x\pm3\sqrt{2}$




(2) 원 위의 점 $(2,\ -\sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은

$2x-\sqrt{5}y=9$




답 (1) $y=-x\pm3\sqrt{2}$ (2) $2x-\sqrt{5}y=9$

**10** 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=10,\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b}$

이 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로

$-\frac{a}{b}=-\frac{1}{3},\ b=3a$ ······ ㉠

점 $(a,\ b)$는 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=10$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+9a^2=10,\ 10a^2=10,\ a^2=1$

따라서 $a=1,\ b=3$ 또는 $a=-1,\ b=-3$이고

$ab=3$

답 3

## 기본 핵심 문제

본문 97쪽

**01** ⑤ **02** ② **03** ③ **04** ⑤ **05** ②

**01** 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 6)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2\times0+1\times(-3)}{2+1}=-1$$

$$y=\frac{2\times6+1\times0}{2+1}=4$$

즉, $P(-1,\ 4)$이고

$\overline{PA}=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=20$

답 ⑤

**02** $x^2+y^2+4ax+(2a-4)y-10=0$에서

$(x^2+4ax)+\{y^2+(2a-4)y\}=10$

$(x^2+4ax+4a^2)+\{y^2+2(a-2)y+(a-2)^2\}$

$=10+4a^2+(a-2)^2$

$(x+2a)^2+(y+a-2)^2=5a^2-4a+14$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(-2a,\ -a+2)$이고 직선 $y=-2x+4$가 중심을 지나므로

$-a+2=-2\times(-2a)+4$

$5a=-2,\ a=-\dfrac{2}{5}$

답 ②

**03** 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 할 때, $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 중심은 제4사분면에 있고 원의 방정식은 다음과 같이 놓을 수 있다.

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 원의 방정식에 대입하면

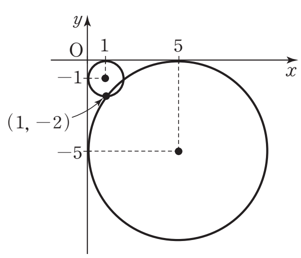
$(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$

$r=1$ 또는 $r=5$

따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은

$1+5=6$




답 ③

**04** $x^2+y^2-6x+8y+10=0$에서

$(x^2-6x)+(y^2+8y)=-10$

$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=-10+9+16$

$(x-3)^2+(y+4)^2=15$

에서 주어진 원의 중심은 $(3,\ -4)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$이다.

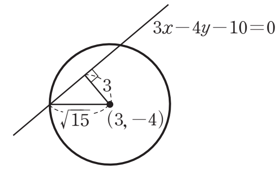
점 $(3,\ -4)$와 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times3-4\times(-4)-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

따라서 그림처럼 원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이를 $l$이라 놓으면 피타고라스 정리에 의해

$\dfrac{l}{2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-3^2}=\sqrt{6}$

따라서 구하는 현의 길이 $l$은 $2\sqrt{6}$




답 ⑤

**05** $x^2+y^2-6x-2y=0$에서

$(x^2-6x)+(y^2-2y)=0$

$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)=9+1$

$(x-3)^2+(y-1)^2=10$

에서 원의 중심은 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

이 원이 직선 $3x-y+k=0$과 접하므로 점 $(3,\ 1)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같다. 즉,

$\dfrac{|3\times3-1\times1+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+8|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$|k+8|=10$

$k+8=10$ 또는 $k+8=-10$

따라서 $k=2$ 또는 $k=-18$

$k>0$이므로 $k=2$

답 ②

# 15 도형의 이동

유제 본문 98~102쪽

**1.** (1) $(2,\ 0)$ (2) $-2$ **2.** $(1,\ 1)$
**3.** (1) $2x-y+4=0$ (2) $(x+1)^2+y^2=4$
**4.** $3x+2y+4=0$ **5.** 풀이 참조 **6.** $y=\frac{1}{2}x$
**7.** (1) $x^2+(y+1)^2=4$ (2) $x^2+(y-1)^2=4$
(3) $x^2+(y+1)^2=4$ **8.** $1$
**9.** (1) $y=\frac{1}{2}x+1$ (2) $x^2+(y-1)^2=1$
**10.** $2x-y-3=0$

**1** (1) $(3+(-1),\ -2+2)$에서
구하는 점의 좌표는 $(2,\ 0)$
(2) 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$는 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동시키는 것이므로 $(1,\ 2)$는 $(1+a,\ 2+b)$로 옮겨진다.
이 점이 $(3,\ -2)$이므로
$1+a=3,\ a=2$
$2+b=-2,\ b=-4$
따라서 $a+b=-2$
답 (1) $(2,\ 0)$ (2) $-2$

**2** 점 $(-1,\ 3)$을 점 $(-2,\ 2)$로 옮기는 평행이동은 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하는 것이므로 원점으로 옮겨지는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 놓으면 이 평행이동에 의하여 이 점은 $(p-1,\ q-1)$로 옮겨지고 이 점이 원점이 되어야 하므로
$p=1,\ q=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 1)$
답 $(1,\ 1)$

**3** (1) 직선 $2x-y-1=0$을 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $1$만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x+2)-(y-1)-1=0$
$2x-y+4=0$
(2) 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $1$만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x+2)-1\}^2+\{(y-1)+1\}^2=4$
$(x+1)^2+y^2=4$
답 (1) $2x-y+4=0$ (2) $(x+1)^2+y^2=4$

**4** 도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(x+2,\ y-1)=0$으로 옮기는 평행이동은 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $1$만큼 평행이동시키는 것이므로 직선 $3x+2y=0$은 $3(x+2)+2(y-1)=0$, 즉 직선 $3x+2y+4=0$으로 옮겨진다.
답 $3x+2y+4=0$

**5** (1) 점 $(2,\ -2)$를
$x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,\ 2)$
$y$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -2)$
원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ 2)$
(2) 점 $(-3,\ -1)$을
$x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3,\ 1)$
$y$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3,\ -1)$
원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3,\ 1)$
답 풀이 참조

**6** 점 $(2,\ -1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로 점 A의 좌표는 $(2,\ 1)$
점 $(2,\ -1)$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ -1)$
이때 직선 AB의 기울기는
$\frac{-1-1}{-2-2}=\frac{1}{2}$
그리고 직선 AB는 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
직선 AB의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-2),\ y=\frac{1}{2}x$
답 $y=\frac{1}{2}x$

**7** 원 $x^2+(y-1)^2=4$를
(1) $x$축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$x^2+(-y-1)^2=4$, 즉 $x^2+(y+1)^2=4$
(2) $y$축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$(-x)^2+(y-1)^2=4$, 즉 $x^2+(y-1)^2=4$
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$(-x)^2+(-y-1)^2=4$, 즉 $x^2+(y+1)^2=4$
답 (1) $x^2+(y+1)^2=4$ (2) $x^2+(y-1)^2=4$
(3) $x^2+(y+1)^2=4$

**8** 직선 $ax-y+2=0$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-ax-y+2=0$
$ax-y+2=0$, $y=ax+2$에서 기울기는 $a$이고
$-ax-y+2=0$, $y=-ax+2$에서 기울기는 $-a$이고
두 직선이 서로 수직이므로
$a\times(-a)=-1$, $a^2=1$

답 1

**9** (1) 직선 $y=2x-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식은
$x=2y-2$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$
(2) 원 $(x-1)^2+y^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 원의 방정식은
$(y-1)^2+x^2=1$, 즉 $x^2+(y-1)^2=1$

답 (1) $y=\frac{1}{2}x+1$ (2) $x^2+(y-1)^2=1$

**10** 직선 $x+2y+3=0$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 직선 $l_1$의 방정식은
$x-2y+3=0$
이고 직선 $l_1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $l_2$의 방정식은
$y-2x+3=0$, 즉 $2x-y-3=0$

답 $2x-y-3=0$

## 기본 핵심 문제

본문 103쪽

**01** ① **02** ② **03** ③ **04** ① **05** ④

**01** 평행이동 $(x, y) \to (x+2, y-1)$에 의하여
점 $(3, -2)$는 $(3+2, -2-1)$
즉, 점 $(5, -3)$으로 옮겨진다.
이 점을 직선 $y=mx+2$가 지나므로
$-3=5m+2$, $m=-1$

답 ①

**02** $y=-2x+3$을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=-2(x-a)+3$
이것을 정리하면
$y=-2x+2a+b+3$
이것이 $y=-2x+3$과 일치해야하므로
$2a+b=0$
양변을 $a$로 나누면
$2+\frac{b}{a}=0$, $\frac{b}{a}=-2$

답 ②

**03** 점 $(a, b)$를 $y$축에 대하여 대칭이동하면 $(-a, b)$
이 점을 원점에 대하여 대칭이동하면 $(a, -b)$
또 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(-b, a)$
이 점의 좌표가 $(4, -3)$이므로
$-b=4$, $a=-3$
따라서 $ab=12$

답 ③

**04** 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+1)^2+(-y-2)^2=1$, $(x-1)^2+(y+2)^2=1$
이 원을 $x$축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-1)^2+(-y+2)^2=1$, $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
이 원의 중심은 $(1, 2)$이고 이 점을 직선 $y=mx+2m-1$이 지나므로
$2=m+2m-1$, $m=1$

답 ①

**05** 직선 $x-2y+a=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y-2x+a=0$

즉, $2x-y-a=0$이고

원 $(x-1)^2+y^2=5$의 중심은 $(1,\ 0)$이므로

점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times1-1\times0-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고 원과 직선이 만나지 않아야 하므로

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5},\ |a-2|>5$$

$a-2>5$ 또는 $a-2<-5$

$a>7$ 또는 $a<-3$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 8이다.

답 ④

## 단원 종합 문제

본문 104~106쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ③ | 03 ② | 04 ③ | 05 ③ |
| 06 ① | 07 ⑤ | 08 ② | 09 ⑤ | 10 ⑤ |
| 11 ④ | 12 ④ | 13 ② | 14 ③ | 15 ⑤ |

**01** 두 점 $\mathrm{A}(2a,\ b)$, $\mathrm{B}(2b,\ a)$에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{(2b-2a)^2+(a-b)^2}\\&=\sqrt{5(a-b)^2}\\&=\sqrt{5}|a-b|=2\sqrt{10}\end{aligned}$$

양변을 $\sqrt{5}$로 나누면

$|a-b|=2\sqrt{2}$

답 ③

**02** 삼각형 OAB의 외심을 $\mathrm{D}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\{a-(-4)\}^2+(b-4)^2}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AD}}$에서

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\{a-(-4)\}^2+(b-4)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a-b=-4$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{BD}}$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$

따라서 $ab=-3$

답 ③

**03** 두 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}\right)$$

즉, $(-1,\ 3)$

이 점을 직선 $y=-x+k$가 지나므로

$3=-(-1)+k,\ k=2$

답 ②

**04** 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{C}(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+x_1+x_2}{3},\ \frac{2+y_1+y_2}{3}\right)$$

이것이 $(3,\ 2)$이므로

$\frac{1+x_1+x_2}{3}=3$에서 $x_1+x_2=8$

$\frac{2+y_1+y_2}{3}=2$에서 $y_1+y_2=4$

따라서 $x_1+x_2+y_1+y_2=8+4=12$

답 ③

**05** 두 직선 $x+(m-1)y+7=0$, $(m+2)x+4y+4=0$이 평행하므로

$\frac{1}{m+2}=\frac{m-1}{4}\neq\frac{7}{4}$

$(m+2)(m-1)=4$에서

$m^2+m-6=0$

$(m+3)(m-2)=0$

$m=-3$ 또는 $m=2$

이때 $m>0$이므로 $m=2$

$m$의 값을 대입하여 두 직선의 식을 다시 구하면

$x+y+7=0$, $x+y+1=0$

직선 $x+y+1=0$ 위의 점 $(-1, 0)$과 직선

$x+y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\times(-1)+1\times0+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

답 ③

|다른 풀이|

$x+(m-1)y+7=0$을 정리하면

$y=-\frac{1}{m-1}x-\frac{7}{m-1}$

$(m+2)x+4y+4=0$을 정리하면

$y=-\frac{m+2}{4}x-1$

두 직선이 평행하므로

$-\frac{1}{m-1}=-\frac{m+2}{4}$, $-\frac{7}{m-1}\neq-1$

$-\frac{1}{m-1}=-\frac{m+2}{4}$를 정리하면

$(m+3)(m-2)=0$

$m=-3$ 또는 $m=2$

이때 $m>0$이므로 $m=2$

$m$의 값을 대입하여 두 직선의 식을 다시 구하면

$x+y+7=0$, $x+y+1=0$

직선 $x+y+1=0$ 위의 점 $(-1, 0)$과 직선

$x+y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\times(-1)+1\times0+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

**06** 세 직선

$2x+y-3=0$, $3x-y+2=0$, $y=mx+2$로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면

두 직선 $2x+y-3=0$, $y=mx+2$가 서로 수직이거나

두 직선 $3x-y+2=0$, $y=mx+2$가 서로 수직이고

세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

$2x+y-3=0$, $y=-2x+3$에서 기울기는 $-2$이므로

$m=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$3x-y+2=0$, $y=3x+2$에서 기울기는 3이므로

$m=-\frac{1}{3}$ …… ㉡

$2x+y-3=0$, $3x-y+2=0$을 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{13}{5}$

이것을 $y=mx+2$에 대입하면

$\frac{13}{5}=\frac{m}{5}+2$, $m=3$

이고 이 값은 ㉠, ㉡에서의 $m$의 값과 다르다.

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 $m$의 값들의 합은

$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

답 ①

**07** $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$에서 $y=0$을 대입하면 $x=6$이므로

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$이 $x$축과 만나는 점 A의 좌표는

$(6, 0)$

$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$에서 $x=0$을 대입하면 $y=4$이므로

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$이 $y$축과 만나는 점 B의 좌표는

$(0, 4)$

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{6}{2}, \frac{4}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$이고

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-0}{0-6}=-\frac{2}{3}$

따라서 구하는 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$

이고, 이 수직이등분선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$y-2=\frac{3}{2}(x-3)$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

이 직선이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=\frac{3}{2}a-\frac{5}{2}$, $a=5$

답 ⑤

| 참고 |

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 $x$절편은 $a$이고 $y$절편은 $b$이다.

**08** A$(4,\ 6)$, B$(-2,\ -2)$에 대하여

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(-2-4)^2+(-2-6)^2}=10$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-2-6}{-2-4}=\frac{4}{3}$이고

직선 AB는 점 A$(4,\ 6)$을 지나므로

직선 AB의 방정식은

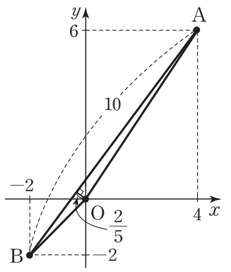
$y-6=\frac{4}{3}(x-4)$, $4x-3y+2=0$

원점과 직선 $4x-3y+2=0$ 사이의 거리는 삼각형 OAB의 높이와 같고 그 높이는

$\frac{|4\times0-3\times0+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times\frac{2}{5}=2$




답 ②

**09** $x^2+y^2-4y=0$에서

$x^2+(y^2-4y+4)=4$

$x^2+(y-2)^2=2^2$

이 원의 반지름의 길이는 2이다.

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$에서

$(x^2-2x)+(y^2+6y)=-1$

$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=-1+1+9$

$(x-1)^2+(y+3)^2=3^2$

이 원의 반지름의 길이는 3이다.

따라서 구하는 반지름의 길이의 합은

$2+3=5$

답 ⑤

**10** $x^2+y^2-4x-6y+k=0$에서

$(x^2-4x)+(y^2-6y)=-k$

$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=-k+4+9$

$(x-2)^2+(y-3)^2=13-k$

원의 중심은 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13-k}$이므로

원이 $y$축에 접하려면 중심의 $x$좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같아야 한다.

즉, $|2|=\sqrt{13-k}$

양변을 제곱하면

$4=13-k$, $k=9$

답 ⑤

**11** 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 C라 할 때,

점 C의 좌표는 $(1,\ -1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

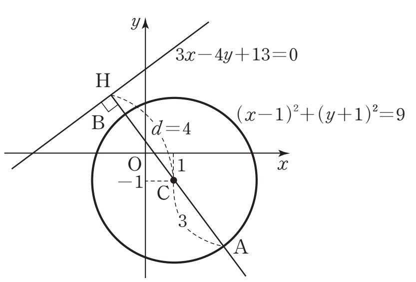
원의 중심 C$(1,\ -1)$과 직선 $3x-4y+13=0$ 사이의 거리를 $d$라 하면

$d=\frac{|3\times1-4\times(-1)+13|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$

점 C에서 직선 $3x-4y+13=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 CH와 원이 만나는 두 점을 직선과 먼쪽부터 차례로 A, B라 할 때, 그림과 같이 원 위의 점 P가 점 A의 위치에 있을 때 직선 $3x-4y+13=0$ 사이의 거리가 최대이며 최댓값 $M=d+3=4+3=7$

점 P가 점 B의 위치에 있을 때 직선 $3x-4y+13=0$ 사이의 거리가 최소이며 최솟값 $m=d-3=4-3=1$

따라서 $Mm=7$




답 ④

**12** 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm2\sqrt{2^2+1}=2x\pm2\sqrt{5}$

즉, $y=2x+2\sqrt{5}$ 또는 $y=2x-2\sqrt{5}$이므로

이 두 직선이 $y$축과 만나는 두 점의 좌표는

$(0,\ 2\sqrt{5})$, $(0,\ -2\sqrt{5})$

따라서 구하는 선분 AB의 길이는

$2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

답 ④

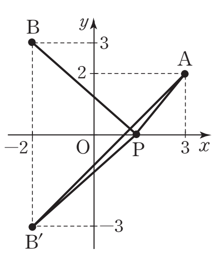
**13** 점 $(1,\ -1)$을 점 $(-2,\ 3)$으로 옮기는 평행이동은 $x$축 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 4만큼 평행이동하는 것이므로 점 $(a,\ b)$를 이 평행이동에 의해 옮기면
$(a-3,\ b+4)$이고 이 점이 원점이 되므로
$a=3,\ b=-4$
따라서 $a+b=-1$

답 ②

**14** 포물선 $y=x^2+a$를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 식은
$y-2=(x-1)^2+a,\ y=x^2-2x+a+3$
이것을 $x$축에 대하여 대칭이동한 포물선의 식은
$-y=x^2-2x+a+3,\ y=-x^2+2x-a-3$
$x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표를 구하기 위해 이 식에 $y=0$을 대입하면
$0=-x^2+2x-a-3$
$x^2-2x+a+3=0$
이 이차방정식의 두 근을 $x_1,\ x_2$이라 할 때
$x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로
$|x_1-x_2|=4$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에서
$x_1+x_2=2,\ x_1x_2=a+3$
$(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2$에서
$4=16+4(a+3)$
따라서 $a=-6$

답 ③

**15** 점 $\mathrm{B}(-2,\ 3)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'$이라 할 때 $\mathrm{B}'(-2,\ -3)$이고
점 P의 위치에 상관없이 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$
이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이고 그 값은
$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$




답 ⑤

## 서술형 유제

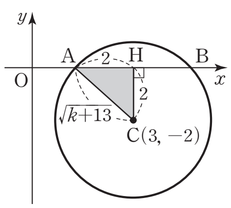
본문 107쪽

**출제의도**

원의 중심과 $x$축 사이의 거리를 구하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

$x^2+y^2-6x+4y=k$에서
$(x^2-6x)+(y^2+4y)=k$
$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=k+9+4$
$(x-3)^2+(y+2)^2=k+13$에서
이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k+13}$이다. ❶
또, 원의 중심을 C라 할 때, 점 C의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로 $x$축과 원의 중심 사이의 거리는 2이다. ❷
원의 중심에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 놓으면
$\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=2$이고, 그림과 같이 세 점 C, H, A를 꼭짓점으로 하는 삼각형 CHA은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$
$(\sqrt{k+13})^2=2^2+2^2$
$k+13=8,\ k=-5$ ❸




답 $-5$

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 원의 방정식에서 반지름의 길이를 $k$가 포함된 식으로 구한 경우 | 30% |
| ❷ | 원의 방정식에서 중심의 좌표를 구하여 $x$축과 원의 중심 사이의 거리를 구한 경우 | 30% |
| ❸ | 피타고라스 정리를 이용하여 상수 $k$의 값을 구한 경우 | 40% |

## 16 집합(1)

**유제** 본문 108~112쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** ③ | **2.** (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$ | | |
| **3.** 풀이 참조 | **4.** 풀이 참조 | **5.** (1) $\not\subset$ (2) $\subset$ (3) $\subset$ | |
| **6.** 10 | **7.** (1) $=$ (2) $\neq$ | | **8.** 2 |
| **9.** 5 | **10.** (1) 16 (2) 15 | | |

**1** ① 10의 양의 약수의 모임, ② 월드컵에서 우승한 나라들의 모임, ④ 방정식 $x^2-2x=0$의 해의 모임, ⑤ 우리 반에서 키가 180 cm 이상인 학생들의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.
③ '잘한다.'의 기준은 사람마다 다르게 판단할 수 있기 때문에 대상을 분명하게 정할 수 없다.
그러므로 집합이 아니다.

답 ③

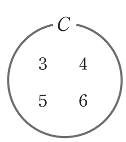
**2** (1) 4는 집합 $A$의 원소이므로 $4\in A$
(2) 5는 집합 $B$의 원소이므로 $5\in B$
(3) 6은 집합 $A$의 원소이므로 $6\in A$
(4) 6은 집합 $B$의 원소가 아니므로 $6\notin B$

답 (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$

**3** 원소를 나열하는 방법으로 나타내면
$A=\{1, 2, 5, 10\}$
이고, 조건을 제시하는 방법으로 나타내면
$A=\{x\,|\,x$는 10의 양의 약수$\}$이다.

답 풀이 참조

**4** $a=1$, $b=2$일 때, $a+b=3$
$a=1$, $b=3$일 때, $a+b=4$
$a=1$, $b=4$일 때, $a+b=5$
$a=2$, $b=2$일 때, $a+b=4$
$a=2$, $b=3$일 때, $a+b=5$
$a=2$, $b=4$일 때, $a+b=6$
그러므로 $C=\{3, 4, 5, 6\}$이고 집합 $C$를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.




답 풀이 참조

**5** (1) 집합 $A$의 원소 중 5는 짝수가 아니므로 $A\not\subset B$
(2) $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$이므로 $A\subset B$
(3) $A=\{0\}$이고 공집합 $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

답 (1) $\not\subset$ (2) $\subset$ (3) $\subset$

**6** $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$a=1$일 때, $A=\{1, 2\}$가 되어 $A\subset B$이다.
$a=2$일 때, $A=\{2, 3\}$이 되어 $A\subset B$이다.
$a=3$일 때, $A=\{3, 4\}$가 되어 $A\subset B$이다.
$a=4$일 때, $A=\{4, 5\}$가 되어 $A\subset B$이다.
$a$가 5 이상의 자연수일 때, $a+1\notin B$이므로 $A\not\subset B$이다.
따라서 자연수 $a$는 1, 2, 3, 4이고 그 합은
$1+2+3+4=10$

답 10

**7** (1) $x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$
$x=-2$ 또는 $x=1$이므로 $B=\{-2, 1\}$
따라서 $A=B$
(2) 10 미만의 짝수인 자연수는 2, 4, 6, 8이므로
$A=\{2, 4, 6, 8\}$이고, 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 $B=\{1, 2, 4, 8\}$
따라서 $A\neq B$

답 (1) $=$ (2) $\neq$

**8** $5\in B$이고 $A=B$이므로 $5\in A$이다.
$a^2+1=5$이므로 $a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$
$a=-2$ 또는 $a=2$
(i) $a=-2$인 경우
$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{-4, -3, 5\}$이므로 $A\neq B$
(ii) $a=2$인 경우
$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 5\}$이므로 $A=B$
(i), (ii)에 의해 $A=B$를 만족시키는 상수 $a$의 값은 2이다.

답 2

**9** $|x-1|<3$에서 $-3<x-1<3$, $-2<x<4$이므로
$A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
이때 집합 $A$의 원소의 개수가 5이므로 $n(A)=5$

답 5

**10** 집합 $A$의 원소의 개수가 4이므로
(1) 집합 $A$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$
(2) 집합 $A$의 진부분집합의 개수는 $2^4-1=15$

답 (1) 16 (2) 15

## 기본 핵심 문제

본문 113쪽

| 01 ④ | 02 ③ | 03 ③ | 04 3 | 05 ③ |
|---|---|---|---|---|

**01** $x\in A$이므로
$x=1$이면 $2\in B$이어야 하므로 $a=2$
$x=2$이면 $3\in B$이어야 하므로 $a=3$
$x=3$이면 $4\in B$이어야 하므로 $a=4$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $a$는 2, 3, 4이므로 그 합은 $2+3+4=9$

답 ④

**02** $a\in A$이므로 $a$가 될 수 있는 값은 0, 1이다.
집합 $B$는 $B=\{1, 2, 4\}$이고 $b\in B$이므로 $b$가 될 수 있는 값은 1, 2, 4이다.
이때 $a+b$의 값은
$a=0$, $b=1$일 때, $a+b=0+1=1$
$a=0$, $b=2$일 때, $a+b=0+2=2$
$a=0$, $b=4$일 때, $a+b=0+4=4$
$a=1$, $b=1$일 때, $a+b=1+1=2$
$a=1$, $b=2$일 때, $a+b=1+2=3$
$a=1$, $b=4$일 때, $a+b=1+4=5$
따라서 $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 $C$의 원소의 개수는 5이다.

답 ③

**03** 5 이하의 짝수인 자연수는 2, 4이므로 $B=\{2, 4\}$이고, 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 $C=\{1, 2, 4, 8\}$이다.
따라서 $A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $C\not\subset A$, $C\not\subset B$이고
$A\subset C$, $B\subset C$이다.

답 ③

**04** $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$이다.
즉, $a^2=4$ 또는 $a^2=9$이다.
(i) $a^2=4$인 경우
$a^2-4=0$에서 $(a+2)(a-2)=0$
$a=-2$ 또는 $a=2$
$a=-2$이면 $A=\{4, 14\}$이므로 $A\neq B$이다.
$a=2$이면 $A=\{2, 4\}$이므로 $A\neq B$이다.
(ii) $a^2=9$인 경우
$a^2-9=0$에서 $(a+3)(a-3)=0$
$a=-3$ 또는 $a=3$
$a=-3$이면 $A=\{9, 22\}$이므로 $A\neq B$이다.
$a=3$이면 $A=\{4, 9\}$이므로 $A=B$이다.
(i), (ii)에 의해 $A=B$를 만족시키는 상수 $a$의 값은 3이다.

답 3

**05** $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$
$x=-1$ 또는 $x=1$이므로
$A=\{-1, 1\}$
$B=\{x \mid |x|\le 2, x\text{는 정수}\}$이므로
$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 $X$는 집합 $A$의 원소 $-1$, 1을 모두 포함하는 집합 $B$의 부분집합이다.
즉, 집합 $\{-2, 0, 2\}$의 부분집합에 원소 $-1$, 1을 모두 포함시키면 된다.
따라서 구하는 집합 $X$의 개수는 집합 $\{-2, 0, 2\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^3=8$

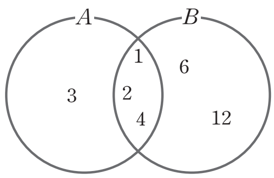
답 ③

# 17 집합(2)

**유제** 본문 114~118쪽

**1.** $\{1, 2, 4, 6, 12\}$ **2.** 3 **3.** $\{b, e\}$
**4.** 8 **5.** (1) $\{4, 6\}$ (2) $\{4, 6\}$ **6.** 풀이 참조
**7.** 풀이 참조 **8.** $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ **9.** 7
**10.** 2

**1** 세 집합 $A$, $A\cup B$, $A\cap B$가 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A\cap B=\{1, 2, 4\}$이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



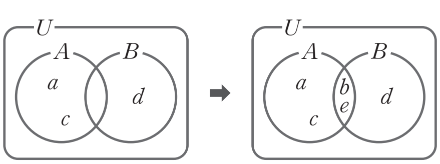

따라서 집합 $B$는 $B=\{1, 2, 4, 6, 12\}$이다.

답 $\{1, 2, 4, 6, 12\}$

**2** 두 집합 $A$와 $B$가 서로소이려면 $a$는 2 또는 4 또는 6 또는 8 또는 10이 아니어야 하고, 두 집합 $A$와 $C$가 서로소이려면 $a$는 3 또는 6 또는 9가 아니어야 한다.
따라서 두 집합 $A$와 $B$가 서로소이고, 두 집합 $A$와 $C$도 서로소가 되도록 하는 10 이하의 자연수 $a$는 1, 5, 7이고 그 개수는 3이다.

답 3

**3** $U=\{a, b, c, d, e\}$, $A-B=\{a, c\}$, $B-A=\{d\}$, $(A\cup B)^C=\varnothing$이므로 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸 후 남은 원소 $b$, $e$를 남은 부분에 써넣어 벤 다이어그램을 완성한다.




따라서 $A\cap B=\{b, e\}$이다.

답 $\{b, e\}$

**4** $a=5$이면 $A-B=\{3, 4\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 7이다.
그러므로 $a\neq5$이고, $A-B=\{3, 4, a\}$
이때 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 15이므로
$3+4+a=15$에서 $a=8$

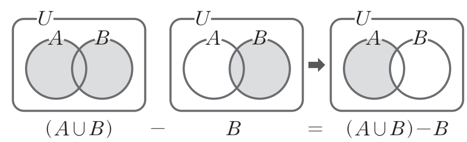
답 8

**5** 전체집합 $U$가 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이고, 두 부분집합 $A$, $B$가 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$이므로
(1) $A\cap B=\{4, 6\}$
(2) $B^C=\{1, 2, 3\}$이므로 $A-B^C=\{4, 6\}$

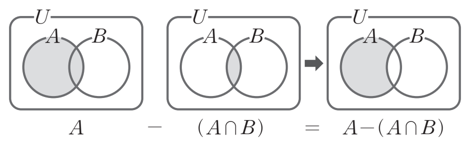
답 (1) $\{4, 6\}$ (2) $\{4, 6\}$

|참고|
일반적으로 전체집합 $U$의 두 부분집합 $A$, $B$에 대하여 $A\cap B=A-B^C$이 성립한다.

**6** 집합 $(A\cup B)-B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같고,



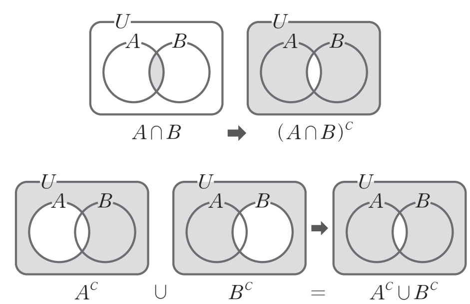

집합 $A-(A\cap B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.




따라서 $(A\cup B)-B=A-(A\cap B)$이 성립한다.

답 풀이 참조

**7** $(A\cap B)^C$와 $A^C\cup B^C$를 각각 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$가 성립한다.

답 풀이 참조

**8** 집합의 분배법칙에 의하여

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\{2, 3, 4\}\cup\{3, 5, 7\}$

$=\{2, 3, 4, 5, 7\}$

답 $\{2, 3, 4, 5, 7\}$

**9** $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+15-28=7$

답 7

**10** 반 학생 전체의 집합을 $U$, 강원도 일대를 희망하는 학생들의 집합을 $A$, 제주도 일대를 희망하는 학생들의 집합을 $B$라 하면 강원도 일대와 제주도 일대를 모두 희망하는 학생들의 집합은 $A\cap B$이고,

$n(U)=32$, $n(A)=23$, $n(B)=26$, $n(A\cap B)=19$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=23+26-19=30$

강원도 일대와 제주도 일대 중 어느 한 곳도 희망하지 않은 학생들의 집합은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=32-30=2$

따라서 구하는 학생의 수는 2이다.

답 2

## 기본 핵심 문제

본문 119쪽

**01** ③ **02** ⑤ **03** ④ **04** ① **05** ④

**01** 전체집합 $U$를 원소를 나열하는 방법으로 나타내면

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$n(A\cap B)=1$이므로 집합 $A$의 원소 1, 3, 5, 7 중 하나는 집합 $B$의 원소이다.

이때 집합 $B$의 모든 원소의 합이 최대이려면 7이 집합 $B$의 원소이어야 한다.

또한 $A\cup B=U$이므로 전체집합 $U$의 원소 중 집합 $A$의 원소가 아닌 원소인 2, 4, 6은 집합 $B$의 원소이어야 한다.

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합이 최대이려면

$B=\{2, 4, 6, 7\}$이어야 하고 그 합은

$2+4+6+7=19$

답 ③

**02** 집합 $\{x|x$는 6의 양의 약수$\}$를 원소를 나열하는 방법으로 나타내면 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.

① $\{1, 2, 3, 6\}\cap\{3, 4, 5\}=\{3\}$이므로 서로소가 아니다.

② $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$x=2$ 또는 $x=4$

집합 $\{x|x^2-6x+8=0\}$을 원소를 나열하는 방법으로 나타내면 $\{2, 4\}$

$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{2, 4\}=\{2\}$

이므로 서로소가 아니다.

③ $x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

집합 $\{x|x^3-x=0\}$을 원소를 나열하는 방법으로 나타내면 $\{-1, 0, 1\}$

$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{-1, 0, 1\}=\{1\}$

이므로 서로소가 아니다.

④ 집합 $\{x|6\le x\le 10$, $x$는 자연수$\}$를 원소를 나열하는 방법으로 나타내면 $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{6, 7, 8, 9, 10\}=\{6\}$

이므로 서로소가 아니다.

⑤ 집합 $\{x|x$는 20 이하의 4의 배수인 자연수$\}$를 원소를 나열하는 방법으로 나타내면 $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{4, 8, 12, 16, 20\}=\varnothing$

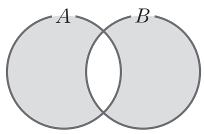
이므로 서로소이다.

답 ⑤

**03** 두 집합 $A$, $B$를 원소를 나열하는 방법으로 나타내면
$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
이때 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$,
$A\cap B=\{1, 2, 4\}$이므로
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 6, 8, 12\}$
따라서 구하는 집합의 원소의 개수는 4이다.

답 ④

| 참고 |
집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.




그러므로 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 집합 $(A-B)\cup(B-A)$와 같다.

**04** 6이 집합 $A-B$의 원소이므로 $6\in A$이고 $6\notin B$이어야 한다.
$a^2-a=6$이므로 $a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$
$a=-2$ 또는 $a=3$
(i) $a=-2$인 경우
$B=\{-4, -1\}$이므로 $6\notin B$이다.
(ii) $a=3$인 경우
$B=\{4, 6\}$이므로 $6\in B$이다.
(i), (ii)에 의해 집합 $B$는 $B=\{-4, -1\}$이고 집합 $B$의 모든 원소의 합은 $-4+(-1)=-5$

답 ①

**05** 임의의 정수 $a$에 대하여 $a\neq a^2+3$이므로 $n(B)=2$이다.
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=2+2-3=1$
$a=2$이면 $B=\{2, 7\}$이므로 $n(A\cap B)=1$
$a=4$이면 $B=\{4, 19\}$이므로 $n(A\cap B)=1$
$a^2+3=2$를 만족시키는 정수 $a$는 존재하지 않는다.
$a^2+3=4$에서 $a^2-1=0$, $(a+1)(a-1)=0$
$a=-1$ 또는 $a=1$
$a=-1$이면 $B=\{-1, 4\}$이므로 $n(A\cap B)=1$
$a=1$이면 $B=\{1, 4\}$이므로 $n(A\cap B)=1$
따라서 정수 $a$는 $-1, 1, 2, 4$이고 그 개수는 4이다.

답 ④

# 18 명제(1)

**유제** 본문 120~124쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** ⑤ | **2.** $\{2, 4, 10\}$ | **3.** 풀이 참조 | **4.** ④ |
| **5.** 풀이 참조 | **6.** 5 | **7.** ㄴ, ㄷ | **8.** 풀이 참조 |
| **9.** ② | **10.** 3 | | |

**1** ① $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$, $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$이므로
$3\sqrt{3}<2\sqrt{7}$이다. (참인 명제)
② $x^2-4x+4=0$에서 $(x-2)^2=0$, $x=2$ (참인 명제)
③ 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 그 개수는 4이다. (참인 명제)
④ 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 그 개수는 4이다. (참인 명제)
⑤ 두 삼각형의 넓이가 서로 같지만 모양이 서로 다른 삼각형이 존재한다. (거짓인 명제)

답 ⑤

**2** 전체집합 $U$가 자연수 전체의 집합이므로 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면
$P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면
$Q=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
조건 '$p$ 그리고 $q$'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로 구하는 집합은 $P\cap Q=\{2, 4, 10\}$

답 $\{2, 4, 10\}$

**3** (1) 조건 '$x$는 3의 배수이다.'의 부정은 '$x$는 3의 배수가 아니다.'이다.
(2) 명제 '6은 8의 양의 약수이다.'의 부정은 '6은 8의 양의 약수가 아니다.'이다.
(3) 조건 '$x\geq 4$'의 부정은 '$x<4$'이다.
(4) 조건 '$x^2=1$'의 부정은 '$x^2\neq 1$'이다.

답 풀이 참조

**4** 조건 '$p$ 또는 $q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이므로
조건 '$x<-1$ 또는 $x\geq 4$'의 부정은 '$x\geq -1$ 그리고 $x<4$', 즉 '$-1\leq x<4$'이다.

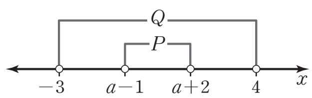
그러므로 집합 $\{x|-1\le x<4\}$의 부분집합은 $\{-1, 1, 3\}$이다.

답 ④

**5** (1) 가정 : $2x+3=7$이다.
결론 : $x^2=4$이다.
(2) 가정 : $x$가 6의 배수이다.
결론 : $x$는 3의 배수이다.
(3) 가정 : 두 삼각형이 합동이다.
결론 : 두 삼각형의 넓이가 서로 같다.

답 풀이 참조

**6** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$P=\{x|a-1<x<a+2\}$
$Q=\{x|-3<x<4\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$가 성립해야 한다.




즉, $-3\le a-1$, $a+2\le 4$이므로 $-2\le a\le 2$
따라서 정수 $a$는 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$이고, 그 개수는 5이다.

답 5

**7** ㄱ. 주어진 명제의 전체집합을 $U$,
조건 '$p$: $x^2+y^2>0$'의 진리집합을 $P$라 하면
$U=\{(x, y)|x, y$는 실수$\}$의 원소 $(0, 0)$은 진리집합 $P$의 원소가 아니다.
따라서 $P\ne U$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
ㄴ. 주어진 명제의 전체집합을 $U$,
조건 '$p$: $x^2+y^2>0$'의 진리집합을 $P$라 하면
$U=\{(x, y)|x, y$는 자연수$\}$,
$P=\{(x, y)|x, y$는 자연수$\}$이다.
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄷ. 주어진 명제의 전체집합을 $U$,
조건 '$p$: $x+y$는 정수이다.'의 진리집합을 $P$라 하면
$U=\{(x, y)|x, y$는 유리수$\}$이고, 원소 $(1, 2)$는 진리집합 $P$의 원소이다.
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄹ. 주어진 명제의 전체집합을 $U$,
조건 '$p$: $x+y<2$'의 진리집합을 $P$라 하면
$U=\{(x, y)|x, y$는 자연수$\}$, $P=\varnothing$이다.
따라서 $P=\varnothing$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

그러므로 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

**8** (1) 명제 '모든 정수는 유리수이다.'의 부정은
'어떤 정수는 유리수가 아니다.'이다.
(2) 명제 '어떤 실수 $x$에 대하여 $|x|\le 0$이다.'의 부정은
'모든 실수 $x$에 대하여 $|x|>0$이다.'이다.

답 풀이 참조

**9** 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역은 $\sim q \longrightarrow p$이다.
명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ②이다.

답 ②

**10** 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
주어진 명제의 대우가 '$x=a$이면 $x^3-4x^2+3x=0$이다.'이고, 이 명제가 참이려면 $a^3-4a^2+3a=0$에서
$a(a-1)(a-3)=0$
$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$
따라서 주어진 명제가 참이 되도록 하는 실수 $a$의 최댓값은 3이다.

답 3

## 기본 핵심 문제

본문 125쪽

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 |
|---|---|---|---|---|
| ① | ① | ④ | ② | ② |

**01** $2\le|x-1|<5$에서

$2\le x-1<5$ 또는 $-5<x-1\le-2$

$2\le x-1<5$에서 $3\le x<6$

이므로 주어진 조건이 참이 되도록 하는 정수는 3, 4, 5

$-5<x-1\le-2$에서 $-4<x\le-1$

이므로 주어진 조건이 참이 되도록 하는 정수는

$-3,\ -2,\ -1$

따라서 구하는 모든 정수 $x$의 값의 합은

$3+4+5+(-3)+(-2)+(-1)=6$

답 ①

**02** 조건 '$x<-3$ 또는 $x>1$'의 부정은

'$x\ge-3$이고 $x\le1$', 즉 $-3\le x\le1$이다.

따라서 주어진 조건의 부정이 참이 되도록 하는 정수 $x$는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$이고, 그 개수는 5이다.

답 ①

**03** ① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $P\not\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$은 거짓이다.

③ $Q\not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

④ $R\subset Q$이므로 $Q^C\subset R^C$이다.

그러므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$은 참이다.

⑤ $R\not\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

답 ④

**04** 명제 '어떤 실수 $x$에 대하여 $x^2-kx+3<0$이다.'가 거짓이려면 이 명제의 부정 '모든 실수 $x$에 대하여 $x^2-kx+3\ge0$이다.'가 참이어야 한다.

그러므로 이차방정식 $x^2-kx+3=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times3=k^2-12\le0$

$(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})\le0$

$-2\sqrt{3}\le k\le2\sqrt{3}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $k$는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이고 그 개수는 7이다.

답 ②

**05** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이고, $P\subset Q^C$이 성립해야 한다.

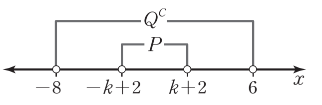
$P=\{x\,|\,|x-2|<k\}$

$\ =\{x\,|\,-k+2<x<k+2\}$

$Q^C=\{x\,|\,|x+1|<7\}$

$\ =\{x\,|\,-8<x<6\}$

이므로 $P\subset Q^C$이 성립하도록 두 집합 $P$, $Q^C$을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




$-8\le-k+2$에서 $k\le10$이고 $k+2\le6$에서 $k\le4$이므로

$k\le4$

따라서 자연수 $k$의 최댓값은 4이다.

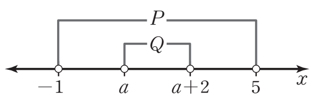
답 ②

# 19 명제(2)

**유제** 본문 126~130쪽

**1.** 5 **2.** ⑤ **3.** 5 **4.** 60
**5.** ㄴ, ㄷ **6.** 풀이 참조 **7.** 풀이 참조 **8.** 풀이 참조
**9.** 풀이 참조 **10.** 풀이 참조

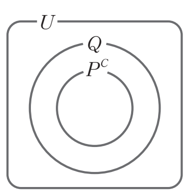
**1** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.
$p$가 $q$이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$가 성립해야 한다.
$P=\{x\,|\,-1<x<5\}$, $Q=\{x\,|\,a<x<a+2\}$
이므로 $Q\subset P$가 성립하도록 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




$-1\le a$이고 $a+2\le 5$에서 $a\le 3$이므로 $-1\le a\le 3$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $a$는 $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$이고 그 합은
$-1+0+1+2+3=5$

답 5

**2** 조건 $p$의 부정 $\sim p$의 진리집합은 $P^C$이고 $\sim p$는 $q$이기 위한 충분조건이므로 $P^C\subset Q$
그러므로 두 집합 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같고, 조건 '$p$ 또는 $q$'의 진리집합은 $P\cup Q$이므로
$P\cup Q=U$이다.




따라서 조건 '$p$ 또는 $q$'의 진리집합과 항상 같은 집합은 전체집합 $U$이다.

답 ⑤

**3** $q$가 $p$이기 위한 충분조건이면 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
즉, $p$는 $q$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.
두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$P=\{x\,|\,a<x<4\}$이고,
$x^2-(b+1)x+b<0$에서 $(x-1)(x-b)<0$
$b<x<1$ 또는 $1<x<b$
이때 $Q=\{x\,|\,b<x<1\}$이면 $P=Q$일 수 없으므로
$Q=\{x\,|\,1<x<b\}$
이고, $P=Q$이려면 $a=1$, $b=4$이어야 한다.
따라서 $a+b=1+4=5$

답 5

**4** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.
$P=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$이고, $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건이 되려면 $P\subset Q$이고 $Q\subset P$, 즉 $P=Q$이어야 한다.
이때 $Q=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$이 되도록 하는 모든 자연수 $n$은 19, 20, 21이다.
따라서 구하는 모든 자연수 $n$의 값의 합은
$19+20+21=60$

답 60

**5** ㄱ. 사다리꼴의 정의는 마주 보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형이고, 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형은 평행사변형의 정의이다.
ㄴ, ㄷ은 각각 마름모의 정의와 직사각형의 정의가 맞다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

**6** 주어진 명제의 대우 '두 실수 $x$, $y$에 대하여 $x\ge 2$이고 $y\ge 2$이면 $xy\ge 4$이다.'가 참임을 보이면 된다.
$x\ge 2$이면 $x-2\ge 0$이고, $y\ge 2$이면 $y-2\ge 0$이므로
$(x-2)(y-2)\ge 0$에서
$xy-2(x+y)+4\ge 0$
$xy\ge 2(x+y)-4$
이때 $x+y\ge 4$이므로 $xy\ge 4$
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

**7** $\sqrt{3}$이 유리수라고 가정하면 서로소인 두 자연수 $m$, $n$에 대하여
$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$
으로 나타낼 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면
$3=\dfrac{n^2}{m^2}$, 즉 $3m^2=n^2$ …… ㉠

이때 $n^2$이 3의 배수이므로 $n$도 3의 배수이다.
그러므로 $n=3k$ ($k$는 자연수)라 하고, 이를 ㉠에 대입하면
$3m^2=9k^2$, 즉 $m^2=3k^2$
마찬가지로 $m^2$이 3의 배수이므로 $m$도 3의 배수이다.
즉 $m$, $n$이 모두 3의 배수가 되어 $m$, $n$이 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

답 풀이 참조

**8** $\sqrt{2}-1$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2}-1=a$($a$는 유리수)로 놓을 수 있다.
즉 $\sqrt{2}=a+1$이고 유리수끼리의 덧셈은 유리수이므로 $a+1$은 유리수이다.
그런데 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니므로 모순이다.
따라서 $\sqrt{2}-1$은 유리수가 아니다.

답 풀이 참조

**9** $a^2-2ab+3b^2=a^2-2ab+b^2+2b^2=(a-b)^2+2b^2$
이때 $(a-b)^2\geq 0$, $2b^2\geq 0$이므로
$(a-b)^2+2b^2\geq 0$
(단, 등호는 $a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.)
따라서 $a^2-2ab+3b^2\geq 0$이다.

답 풀이 참조

**10** (i) $|a|<|b|$일 때,
$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로
$|a-b|>|a|-|b|$
(ii) $|a|\geq|b|$일 때,
$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=2(|ab|-ab)$
이때 $|ab|\geq ab$이므로 $2(|ab|-ab)\geq 0$
즉, $|a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$
$|a-b|\geq 0$, $|a|-|b|\geq 0$이므로
$|a-b|\geq|a|-|b|$
(i), (ii)에서 $|a-b|\geq|a|-|b|$
(단, 등호는 $|a|\geq|b|$, $ab\geq 0$일 때 성립한다.)

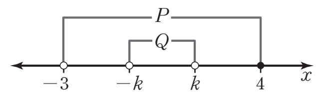
답 풀이 참조

## 기본 핵심 문제

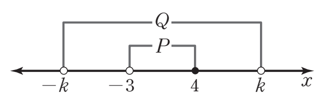
본문 131쪽

**01** ③ **02** ⑤ **03** ① **04** 12

**01** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$P=\{x|-3<x\leq 4\}$,
$Q=\{x|-k<x<k\}$
$p$가 $q$이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$이어야 하므로 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




이때 $-3\leq -k$에서 $k\leq 3$이어야 하고, $k\leq 4$이어야 하므로
$k\leq 3$
그러므로 $p$가 $q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 $k$의 최댓값은 $M=3$
또한 $p$가 $q$이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$이어야 하므로 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




이때 $-k\leq -3$에서 $k\geq 3$이어야 하고, $k>4$이어야 하므로
$k>4$
그러므로 $p$가 $q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 $k$의 최솟값은 $m=5$
따라서 $M+m=8$

답 ③

**02** 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$이라 하자.
$p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $Q^C\subset P$이고,
$q$는 $\sim r$이기 위한 필요충분조건이므로 $Q=R^C$이다.
이때 $Q=R^C$이므로 $Q^C=R$이고 $R\subset P$이다.
따라서 $r$은 $p$이기 위한 충분조건이므로 주어진 명제 중 항상 참인 명제는 $r \longrightarrow p$이다.

답 ⑤

**03** 주어진 명제의 대우는
'두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m+n$이 짝수이면 $m^2+n^3$은 짝수이다.'이다.

(i) $m$, $n$이 모두 짝수인 경우
두 자연수 $a$, $b$에 대하여 $m=2a$, $n=2b$라 하면
$$m^2+n^3=(2a)^2+(2b)^3$$
$$=4a^2+8b^3$$
$$=2(\boxed{(가)\ 2a^2}+4b^3)$$
이므로 $m^2+n^3$은 짝수이다.
(ii) $m$, $n$이 모두 홀수인 경우
두 자연수 $c$, $d$에 대하여 $m=2c-1$, $n=2d-1$이라 하면
$$m^2+n^3=(2c-1)^2+(2d-1)^3$$
$$=(4c^2-4c+1)+(8d^3-12d^2+6d-1)$$
$$=2(2c^2-2c+\boxed{(나)\ 4d^3-6d^2+3d})$$
이므로 $m^2+n^3$은 짝수이다.
(i), (ii)에서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
따라서 $f(a)=2a^2$, $g(d)=4d^3-6d^2+3d$이므로
$$f(3)+g(2)=18+(32-24+6)$$
$$=32$$

답 ①

**04** 두 양수 $a$, $b$에 대하여
$a^2b^2=36$이므로 $ab=6$
$$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}$$
$$=2\sqrt{6ab}$$
$$=2\sqrt{6\times 6}$$
$$=12$$

답 12

## 단원 종합 문제

본문 132~134쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ④ | 02 ④ | 03 ⑤ | 04 ③ | 05 ② |
| 06 ③ | 07 ② | 08 ② | 09 ⑤ | 10 ③ |
| 11 ⑤ | 12 ④ | 13 ⑤ | 14 2 | 15 ③ |

**01** 집합 $\{x\mid x^2-kx+2k+5=0,\ x\text{는 실수}\}$가 공집합이 되려면 이차방정식 $x^2-kx+2k+5=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.
즉, 이차방정식 $x^2-kx+2k+5=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D<0$이어야 하므로
$$D=k^2-4(2k+5)$$
$$=k^2-8k-20$$
$$=(k+2)(k-10)<0$$
에서 $-2<k<10$
따라서 구하는 정수 $k$는 $-1$, $0$, $1$, $2$, $\cdots$, $9$이고 그 개수는 $11$이다.

답 ④

**02** $x\in A$이므로 $x$가 될 수 있는 값은 $1$, $2$, $3$이고, $y\in B$이므로 $y$가 될 수 있는 값은 $-1$, $1$, $2$이다.
그러므로 $x+y$의 값은
$x=1$, $y=-1$일 때, $x+y=1+(-1)=0$
$x=1$, $y=1$일 때, $x+y=1+1=2$
$x=1$, $y=2$일 때, $x+y=1+2=3$
$x=2$, $y=-1$일 때, $x+y=2+(-1)=1$
$x=2$, $y=1$일 때, $x+y=2+1=3$
$x=2$, $y=2$일 때, $x+y=2+2=4$
$x=3$, $y=-1$일 때, $x+y=3+(-1)=2$
$x=3$, $y=1$일 때, $x+y=3+1=4$
$x=3$, $y=2$일 때, $x+y=3+2=5$
따라서 $C=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 $n(C)=6$

답 ④

**03** 집합 $A=\{-1,\ 2\}$가 집합
$B=\{x\mid x^3+ax^2+4x+b=0\}$
의 부분집합이므로 집합 $A$의 원소 $-1$과 $2$는 삼차방정식 $x^3+ax^2+4x+b=0$의 실근이다.
$-1+a-4+b=0$에서 $a+b=5$ …… ㉠
$8+4a+8+b=0$에서 $4a+b=-16$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=12$
$x^3-7x^2+4x+12=0$에서
$(x+1)(x-2)(x-6)=0$
$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$
따라서 집합 $B$는 $B=\{-1, 2, 6\}$이고 모든 원소의 합은
$-1+2+6=7$

답 ⑤

**04** $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고,
$(x-2a)(x-3a)\le 0$에서 $2a\le x\le 3a$이므로 집합 $B$의 원소는 $2a$ 이상 $3a$ 이하의 자연수이다.
$a=1$이면 $B=\{2, 3\}$이므로 $n(A\cap B)=2$
$a=2$이면 $B=\{4, 5, 6\}$이므로 $n(A\cap B)=3$
$a=3$이면 $B=\{6, 7, 8, 9\}$이므로 $n(A\cap B)=4$
$a=4$이면 $B=\{8, 9, 10, 11, 12\}$이므로 $n(A\cap B)=3$
$a=5$이면 $B=\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$이므로
$n(A\cap B)=1$
$a\ge 6$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$
따라서 $n(A\cap B)=3$인 모든 자연수 $a$는 2, 4이고 그 합은 $2+4=6$

답 ③

**05** $b=1$인 경우와 $b\ne 1$인 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $b=1$인 경우
$1\in A\cap B$이므로 $a$는 집합 $B$의 원소가 아니어야 한다.
이때 $a=10$이면 $a+b$의 값이 최대이고, 그 값은
$10+1=11$
$a=2$이면 $a+b$의 값이 최소이고, 그 값은 $2+1=3$
(ii) $b\ne 1$인 경우
$1\notin A\cap B$이므로 $a$는 집합 $B$의 원소이어야 한다.
이때 $a=10$, $b=10$이면 $a+b$의 값이 최대이고, 그 값은 $10+10=20$
$a=3$, $b=2$이면 $a+b$의 값이 최소이고, 그 값은
$3+2=5$
(i), (ii)에 의해 $a+b$의 최댓값은 20, 최솟값은 3이므로 그 합은 $20+3=23$

답 ②

**06** 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{a, b\}$와 서로소가 아닌 부분집합의 개수는 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 모든 부분집합의 개수에서 집합 $\{a, b\}$와 서로소인 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 모든 부분집합의 개수는
$2^5=32$
집합 $\{a, b\}$와 서로소인 부분집합은 집합 $\{c, d, e\}$의 부분집합이므로 그 개수는 $2^3=8$
따라서 구하는 집합의 개수는
$32-8=24$

답 ③

**| 다른 풀이 |**
집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{a, b\}$와 서로소가 아닌 부분집합은 원소 $a$를 포함하거나, 원소 $b$를 포함하는 집합이다.
원소 $a$를 포함하는 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ …… ㉠
원소 $b$를 포함하는 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ …… ㉡
원소 $a$와 $b$를 모두 포함하는 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이고, 이는 ㉠에도 포함되고 ㉡에도 포함된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$16+16-8=24$

**07** $n(B)=2\times n(A)=6\times n(A-B)$
이므로 $n(A-B)=k$($k$는 자연수)라 하면
$n(A)=3k$, $n(B)=6k$이고,
$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(A)-n(A-B)\\&=3k-k\\&=2k\end{aligned}$$
$n(A\cap B)=6$이므로 $2k=6$에서 $k=3$
$n(A)=9$, $n(B)=18$, $n(A\cap B)=6$이므로
$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=9+18-6\\&=21\end{aligned}$$

답 ②

**08** 드모르간의 법칙에 의하여
$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$
이므로
$(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 6\}$에서 $A\cap B=\{4, 5\}$
$A-B=\{1, 3\}$이므로
$A=(A-B)\cup(A\cap B)$
$=\{1, 3\}\cup\{4, 5\}$

$=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$
따라서 집합 $A$의 모든 원소의 합은
$1+3+4+5=13$

답 ②

**09** 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C$이고, $n(P)=n(P^C)=3$
이때 두 집합 $P$와 $P^C$는 서로소이고, $P \cup P^C=U$이므로
$n(U)=n(P \cup P^C)$
$=n(P)+n(P^C)$
$=3+3=6$
전체집합 $U=\{x|x$는 $n$ 이하의 짝수인 자연수$\}$의 원소의 개수가 6이어야 하므로 $U=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$이어야 한다.
따라서 $n$이 될 수 있는 자연수는 12, 13이므로 그 합은
$12+13=25$

답 ⑤

**10** 조건 $q$가 $x^2-2x-8 \le 0$이므로
조건 $\sim q$는 $x^2-2x-8>0$이고,
$(x+2)(x-4)>0$에서 $x<-2$ 또는 $x>4$
두 조건 $p$, $\sim q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q^C$이라 하면
$P=\{k\}$, $Q^C=\{x<-2$ 또는 $x>4\}$
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이려면 $P \subset Q^C$이어야 하므로
$k<-2$ 또는 $k>4$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $k$의 최솟값은 5이다.

답 ③

**11** $p$: $a+b=0$
$q$: $|a|+|b|=0$에서 $a=b=0$
$r$: $|a|-|b|=0$에서 $|a|=|b|$
ㄱ. (반례) $a=1$, $b=-1$이면 $a+b=0$이지만
$a=b=0$은 성립하지 않으므로
명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
ㄴ. $a+b=0$, 즉 $a=-b$이면 $|a|=|b|$이므로
명제 $p \longrightarrow r$은 참이다.
ㄷ. (반례) $a=0$, $b=0$이면 $|a|=|b|$이고,
$a+b=0$이 성립하므로
명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.
ㄹ. 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$의 대우는 $q \longrightarrow r$이고,
$a=b=0$이면 $|a|=|b|$이므로 명제 $q \longrightarrow r$이 참이고 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

**12** 명제
'4 이하의 모든 자연수 $n$에 대하여 $n^2-4n+k \ge 0$이다.'
가 거짓이면 이 명제의 부정
'4 이하의 어떤 자연수 $n$에 대하여 $n^2-4n+k<0$이다.'
는 참이다.
$n=1$일 때 $1^2-4\times1+k=k-3<0$에서 $k<3$
$n=2$일 때 $2^2-4\times2+k=k-4<0$에서 $k<4$
$n=3$일 때 $3^2-4\times3+k=k-3<0$에서 $k<3$
$n=4$일 때 $4^2-4\times4+k=k<0$에서 $k<0$
그러므로 $k<4$이면 주어진 명제의 부정이 참이다.
따라서 구하는 정수 $k$의 최댓값은 3이다.

답 ④

|참고|
$n^2-4n+k=(n-2)^2+k-4$ …… ㉠
$n=2$일 때 ㉠의 값이 최소이고, 최솟값이 $k-4$이므로 $k=3$이면 주어진 명제는 거짓이다.

**13** 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$이라 하자.
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.
그러므로 $Q^C \subset P$
또한 명제 $p \longrightarrow r$가 참이므로 $P \subset R$
$Q^C \subset P \subset R$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow r$이 항상 참이고 그 대우 $\sim r \longrightarrow q$도 항상 참이다.
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**14** 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$이라 하자.
조건 $p$가 $p$: $x^2-8x+12=0$이므로
$(x-2)(x-6)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$
그러므로 $P=\{2,\ 6\}$
또한 $R=\{k\}$이고 조건 (가)에서 $p$는 $r$이기 위한 필요조건이므로 $R \subset P$이어야 한다.
즉, $\{k\} \subset \{2,\ 6\}$이므로 $k=2$ 또는 $k=6$
(i) $k=2$인 경우
조건 $q$가 $q$: $x^2-x-2=0$이므로
$(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
그러므로 $Q=\{-1,\ 2\}$

이때 $R=\{2\}$이므로 $R\subset Q$이고, $r$은 $q$이기 위한 충분조건이다.

(ii) $k=6$인 경우

조건 $q$가 $q$: $x^2-x-6=0$이므로

$(x+2)(x-3)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

그러므로 $Q=\{-2, 3\}$

이때 $R=\{6\}$이므로 $R\not\subset Q$이고, $r$은 $q$이기 위한 충분조건이 아니다.

(i), (ii)에 의해 주어진 조건을 만족시키는 실수 $k$의 값은 2이다.

답 2

**15** $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$

그러므로 $a=2$, $b^2+b=6$ 또는 $a=6$, $b^2+b=2$이다.

(i) $a=2$, $b^2+b=6$인 경우

$b^2+b=6$에서 $b^2+b-6=0$

$(b+3)(b-2)=0$

$b=-3$ 또는 $b=2$

그러므로 $a+b$의 최댓값은 $2+2=4$이고, 최솟값은 $2+(-3)=-1$

(ii) $a=6$, $b^2+b=2$인 경우

$b^2+b=2$에서 $b^2+b-2=0$

$(b+2)(b-1)=0$

$b=-2$ 또는 $b=1$

그러므로 $a+b$의 최댓값은 $6+1=7$이고, 최솟값은 $6+(-2)=4$

(i), (ii)에 의해 $a+b$의 최댓값 $M=7$이고, 최솟값 $m=-1$

따라서 $M-m=7-(-1)=8$

답 ③

## 서술형 유제

본문 135쪽

**출제의도**

주어진 조건의 진리집합을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

**풀이**

30의 양의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이므로

$U=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ······ ❶

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

집합 $U$의 원소 중에서 6의 배수는 6, 30이므로

$P=\{6, 30\}$이고, $P^C=\{1, 2, 3, 5, 10, 15\}$

$Q=\{x \mid x<n\}$ ······ ❷

조건 '$\sim p$ 그리고 $q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

$n(P^C\cap Q)=4$이려면 $P^C\cap Q=\{1, 2, 3, 5\}$이어야 한다.

따라서 $5<n\leq 10$이어야 하므로 구하는 모든 자연수 $n$은 6, 7, 8, 9, 10이고 그 합은

$6+7+8+9+10=40$ ······ ❸

답 40

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 전체집합 $U$의 원소를 나열한 경우 | 20% |
| ❷ | 조건 $p$의 진리집합 $P$와 $P^C$, 조건 $q$의 진리집합 $Q$를 구한 경우 | 30% |
| ❸ | 주어진 조건을 만족시키는 집합 $P^C\cap Q$와 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구한 경우 | 50% |

# 20 함수

**유제** 본문 136~140쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** ⑤ | **2.** 4 | **3.** ㄱ, ㄴ, ㄹ | **4.** 6 |
| **5.** 21 | **6.** 5 | **7.** 8 | **8.** ㄱ |
| **9.** 7 | **10.** 8 | | |

**1** ① $y=x$이므로 집합 $X$의 각 원소에 대하여
$-1 \longrightarrow -1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 집합 $X$의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.
그러므로 함수이다.
② $y=-x$이므로 집합 $X$의 각 원소에 대하여
$-1 \longrightarrow 1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow -1$과 같이 집합 $X$의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.
그러므로 함수이다.
③ $y=x^2$이므로 집합 $X$의 각 원소에 대하여
$-1 \longrightarrow 1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$과 같이 집합 $X$의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.
그러므로 함수이다.
④ $y=|x|-1$이므로 집합 $X$의 각 원소에 대하여
$-1 \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow -1$, $1 \longrightarrow 0$과 같이 집합 $X$의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.
그러므로 함수이다.
⑤ $y=|x|+1$이므로 집합 $X$의 원소 $-1$과 1에 대응하는 2가 집합 $X$의 원소가 아니다.
그러므로 $X$에서 $X$로의 함수가 아니다.

답 ⑤

**2** 3의 양의 약수는 1, 3이므로 그 개수는 2,
4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 그 개수는 3,
5의 양의 약수는 1, 5이므로 그 개수는 2,
6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 그 개수는 4이다.
그러므로 집합 $X$의 원소 3과 5는 집합 $Y$의 원소 2에 대응하고, 집합 $X$의 원소 4는 집합 $Y$의 원소 3에 대응한다.
따라서 이 대응이 함수가 되려면 집합 $X$의 원소 6이 집합 $Y$의 원소 $a$에 대응되어야 하므로 $a$는 4이어야 한다.

답 4

**3** ㄱ. $f(x)=x$이므로
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$
그러므로 함수 $f(x)=x$의 치역은
$X=\{1, 2, 3, 4\}$이다.
ㄴ. $f(x)=|x|$이므로
$f(1)=|1|=1$, $f(2)=|2|=2$, $f(3)=|3|=3$,
$f(4)=|4|=4$
그러므로 함수 $f(x)=|x|$의 치역은
$X=\{1, 2, 3, 4\}$이다.
ㄷ. $f(x)=-x$이므로
$f(1)=-1$, $f(2)=-2$, $f(3)=-3$, $f(4)=-4$
그러므로 함수 $f(x)=-x$의 치역은
$\{-4, -3, -2, -1\}$이고 집합 $X$가 아니다.
ㄹ. $f(x)=-x+5$이므로
$f(1)=-1+5=4$, $f(2)=-2+5=3$,
$f(3)=-3+5=2$, $f(4)=-4+5=1$
그러므로 함수 $f(x)=-x+5$의 치역은
$X=\{1, 2, 3, 4\}$이다.
따라서 치역이 $X$인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**4** $f(-1)=-1$, $g(-1)=b-3$에서
$f(-1)=g(-1)$이어야 하므로
$b-3=-1$
$b=2$
$f(a)=a^2-2$, $g(a)=3a+2$에서
$f(a)=g(a)$이어야 하므로
$a^2-2=3a+2$
$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$
$a=-1$ 또는 $a=4$
$a\neq-1$이므로 $a=4$
따라서 $a=4$, $b=2$이므로
$a+b=4+2=6$

답 6

**5** 함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프가
$\{(-1, 2), (0, 4), (2, k)\}$
이므로 $f(-1)=2$, $f(0)=4$, $f(2)=k$이다.
$f(-1)=1-a+b=2$에서 $-a+b=1$ ······ ㉠
$f(0)=b=4$이므로 ㉠에서 $a=3$
그러므로 $f(x)=x^2+3x+4$이고,

$k=f(2)=4+6+4=14$

따라서 $a+b+k=3+4+14=21$

답 21

**6** $f(x)=ax+b$에서

$f(2)=2a+b=3$ …… ㉠

$f(3)=3a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=7$

따라서 $a+b=-2+7=5$

답 5

**7** $f(1)=4$이고 함수 $f$가 일대일함수이므로 $f(2)\neq4$이고 $f(3)\neq4$이다.

그러므로 $f(2)+f(3)$의 값이 최대이려면

$f(2)=3$, $f(3)=5$ 또는 $f(2)=5$, $f(3)=3$

이어야 한다.

따라서 구하는 최댓값은 $3+5=8$

답 8

**8** ㄱ. 함수 $f(x)=2x-3$은

$x_1\neq x_2$이면 $2x_1-3\neq 2x_2-3$

즉, $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 일대일함수이다.

또한 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 함수 $f(x)=2x-3$은 일대일대응이다.

ㄴ. 함수 $g(x)=x^2-1$은

정의역에 속하는 두 원소 $-1$, $1$에 대하여

$g(-1)=g(1)=0$으로 함숫값이 서로 같다.

그러므로 일대일함수가 아니고, 일대일대응도 아니다.

ㄷ. 함수 $h(x)=x+|x|$는

정의역에 속하는 두 원소 $-2$, $-1$에 대하여

$h(-2)=h(-1)=0$으로 함숫값이 서로 같다.

그러므로 일대일함수가 아니고, 일대일대응도 아니다.

따라서 일대일대응은 ㄱ이다.

답 ㄱ

**9** 집합 $X$에서 $X$로의 함수 $f(x)=a|x|+b$가 항등함수이므로 $f(-3)=-3$, $f(2)=2$이어야 한다.

$f(-3)=a\times|-3|+b=3a+b=-3$ …… ㉠

$f(2)=a\times|2|+b=2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=12$

따라서 $a+b=-5+12=7$

답 7

**10** 두 함수 $f$, $g$가 상수함수이므로 두 상수 $c$, $d$에 대하여 $f(x)=c$, $g(x)=d$라 하자.

$f(1)=2g(2)$이므로 $c=2d$ …… ㉠

$f(3)+4g(4)=6$이므로 $c+4d=6$ …… ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $c=2$, $d=1$

따라서 $f(5)+6g(6)=c+6d=2+6=8$

답 8

## 기본 핵심 문제

본문 141쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** 21 | **02** ③ | **03** ② | **04** ③ | **05** 6 |

**01** $6=1\times4+2$이므로 $f(6)=2$

$9=2\times4+1$이므로 $f(9)=1$

$12=3\times4$이므로 $f(12)=0$

$15=3\times4+3$이므로 $f(15)=3$

$18=4\times4+2$이므로 $f(18)=2$

이때 $f(6)+f(15)=5$이고 $f(15)+f(18)=5$이므로

$a=6$, $b=15$ 또는 $a=15$, $b=18$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $6+15=21$

답 21

**02** $X=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$f(1)=-1+a=a-1$

$f(2)=-2+a=a-2$

$f(3)=-3+a=a-3$

$f(6)=-6+a=a-6$

그러므로 치역은 $\{a-1, a-2, a-3, a-6\}$이고 치역의 모든 원소의 합은

$(a-1)+(a-2)+(a-3)+(a-6)=4a-12$

따라서 $4a-12=0$에서 $a=3$

답 ③

**03** $f(x)=g(x)$를 만족시키는 $x$를 구하면

$x^3+3=3x^2+x$에서

$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

그러므로 조건을 만족시키는 집합 $X$는 집합 $\{-1, 1, 3\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2 이상인 집합이어야 한다.

이때 집합 $X$의 모든 원소의 합이 최대이려면
$X=\{1,\ 3\}$이어야 하고 그 합은
$1+3=4$

답 ②

**04** 함수 $f(x)=bx+5$가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 서로 같아야 한다.
$b=0$이면 $f(x)=5$이므로 일대일대응이 될 수 없다.
$b>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선의 일부이므로
$f(-1)=-4,\ f(3)=a$
이어야 한다.
$b<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 음수인 직선의 일부이므로
$f(-1)=a,\ f(3)=-4$
이어야 한다.
(i) $f(-1)=-4,\ f(3)=a$인 경우
$f(-1)=-b+5=-4$에서 $b=9$
이고 $f(x)=9x+5$이므로 $a=f(3)=27+5=32$가 되어 집합 $Y=\{y\mid -4\le y\le 32\}$는 전체집합 $U$의 부분집합이 될 수 없다.
(ii) $f(-1)=a,\ f(3)=-4$인 경우
$f(3)=3b+5=-4$에서 $3b=-9,\ b=-3$
이고 $f(x)=-3x+5$이므로 $a=f(-1)=3+5=8$이 되어 집합 $Y=\{y\mid -4\le y\le 8\}$은 전체집합 $U$의 부분집합이다.
(i), (ii)에 의해 $a=8,\ b=-3$
따라서 $a+b=8+(-3)=5$

답 ③

**05** 함수 $f$는 항등함수이므로 $f(x)=x$
함수 $g$는 상수함수이므로 $g(x)=c$($c$는 상수)라 하자.
$f(12)=3g(1)$에서 $12=3c,\ c=4$
그러므로 함수 $g$는 $g(x)=4$이고,
$af(a)=9g(3)$에서 $a\times a=9\times 4=36$
$a>0$이므로 $a=6$

답 6

## 21 합성함수와 역함수

**유제** 본문 142~146쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** 25 | **2.** 4 | **3.** 22 | **4.** 6 |
| **5.** 5 | **6.** 12 | **7.** 4 | **8.** 3 |
| **9.** 2 | **10.** 8 | | |

**1** $(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=g(4)$
$=15$
$(f\circ g)(3)=f(g(3))$
$=f(8)$
$=10$
따라서
$(g\circ f)(2)+(f\circ g)(3)=15+10=25$

답 25

**2** $(g\circ f)(a)=g(f(a))$
$=g(a)$
$=a^2+a$
$(f\circ g)(3)=f(g(3))$
$=f(12)$
$=24-a$
$(g\circ f)(a)=(f\circ g)(3)$에서
$a^2+a=24-a$
$a^2+2a-24=0$
$(a+6)(a-4)=0$
$a=-6$ 또는 $a=4$
따라서 양수 $a$의 값은 4이다.

답 4

**3** $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$
$=(f\circ g)(h(x))$
이고 $h(4)=8-3=5$이므로
$(f\circ(g\circ h))(4)=(f\circ g)(h(4))$
$=(f\circ g)(5)$
$=5^2-3=22$

답 22

**4** $g(1)=3$이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))$
$=f(3)$
$=9a+3a+1$
$=12a+1$

$f(1)=a+a+1=2a+1$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))$
$=g(2a+1)$
$=2(2a+1)+1$
$=4a+3$

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서

$12a+1=4a+3$

$8a=2,\ a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+1$이므로

$f(4)=\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{1}{4}\times 4+1=4+1+1=6$

답 6

**5** 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 3,\ 5\}$로의 함수 $f$가 역함수가 존재하므로 함수 $f$는 일대일대응이고,

$f(1)=5$, $f(2)=1$이므로 $f(3)=3$이다.

또한 $f(2)=1$이므로 $f^{-1}(1)=2$이다.

따라서 $f(3)+f^{-1}(1)=3+2=5$

답 5

**6** $f^{-1}(5)=-1$에서 $f(-1)=5$이므로

$f(-1)=a-3=5$에서 $a=8$

그러므로 $f(x)=3x+8$이다.

$f(2)=3\times 2+8=14$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$3k+8=2$에서 $3k=-6,\ k=-2$

그러므로 $f^{-1}(2)=-2$

따라서 $f(2)+f^{-1}(2)=14+(-2)=12$

답 12

**7** 역함수의 성질에 의해

$(f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}$이고 $f\circ f^{-1}$는 항등함수이므로

$(f\circ(f\circ f)^{-1})(7)=(f\circ(f^{-1}\circ f^{-1}))(7)$
$=((f\circ f^{-1})\circ f^{-1})(7)$
$=f^{-1}(7)$

$f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$f(a)=2a-1=7$에서 $a=4$

따라서 $(f\circ(f\circ f)^{-1})(7)=4$

답 4

**8** 역함수의 성질에 의해

$(f^{-1}\circ g)^{-1}=(g^{-1}\circ(f^{-1})^{-1})$

$(f^{-1})^{-1}=f$이므로

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)=(g^{-1}\circ(f^{-1})^{-1})(-2)$
$=(g^{-1}\circ f)(-2)$
$=g^{-1}(f(-2))$
$=g^{-1}(7)$

$g^{-1}(7)=a$라 하면 $g(a)=7$이므로

$g(a)=3a-2=7$에서 $a=3$

따라서 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-2)=3$

답 3

**9** 실수 전체의 집합을 $R$이라 하면 함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x+a$는 $R$에서 $R$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{1}{2}x+a$를 $x$에 대하여 정리하면

$-\frac{1}{2}x=y-a$

$x=-2y+2a$

이때 $x$와 $y$를 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-2x+2a$

이므로 $-2x+2a=bx+8$에서 $a=4,\ b=-2$

따라서 $a+b=4+(-2)=2$

답 2

**10** 함수 $f(x)=3x-12$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $y$좌표는 0이므로

$3x-12=0$에서 $x=4$

그러므로 점 A의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $y$축과 만나는 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점과 같다.

그러므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

답 8

|참고|

함수 $f(x)=3x-12$의 역함수를 이용하여 점 B의 좌표를 구해보자.

$y=3x-12$를 $x$에 대하여 정리하면

$3x=y+12$

$x=\frac{1}{3}y+4$

이때 $x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x+4$

그러므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $y$축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.

## 기본 핵심 문제

본문 147쪽

| 01 ⑤ | 02 ② | 03 ⑤ | 04 ① | 05 ① |
|---|---|---|---|---|

**01** $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))$

$=f(-2\times(-1)+3)$

$=f(5)$

$=5-3=2$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))$

$=f(1-3)$

$=f(-2)$

$=-2\times(-2)+3$

$=7$

따라서

$(f\circ f)(-1)+(f\circ f)(1)=2+7=9$

답 ⑤

**02** $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(2x-1)$

$=a(2x-1)+a-2$

$=2ax-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(ax+a-2)$

$=2(ax+a-2)-1$

$=2ax+2a-5$

$f\circ g=g\circ f$에서 $2ax-2=2ax+2a-5$

$2a-5=-2$에서 $2a=3,\ a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$이고, $g(2a)=g(3)=5$이므로

$(f\circ g)(2a)=f(g(2a))$

$=f(5)$

$=\frac{3}{2}\times5-\frac{1}{2}$

$=7$

답 ②

**03** $f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로

$f(3)=3a+a+b=4a+b=2$ …… ㉠

$f^{-1}(6)=1$에서 $f(1)=6$이므로

$f(1)=a+a+b=2a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=10$

따라서 $f(x)=-2x+8$이고

$$f(ab)=f(-20)$$
$$=-2\times(-20)+8$$
$$=48$$

답 ⑤

**04** 역함수의 성질에 의해

$(f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}$이고 $f\circ f^{-1}$는 항등함수이므로

$((g^{-1}\circ f)\circ(f\circ f)^{-1})(3)$

$=((g^{-1}\circ f)\circ(f^{-1}\circ f^{-1}))(3)$

$=(g^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(3)$

$=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)$

이때 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(g^{-1}\circ f^{-1})(3)=a$라 하면 $(f\circ g)(a)=3$이므로

$-2a+7=3$에서 $a=2$

따라서 $((g^{-1}\circ f)\circ(f\circ f)^{-1})(3)=2$

답 ①

**05** 함수 $f(x)=2x-a$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $y$좌표는 0이므로

$2x-a=0$에서 $x=\frac{a}{2}$

그러므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $y$축과 만나는 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점과 같다.

그러므로 점 B의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$

이므로 $\frac{a}{2}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$에서 $a=8$

답 ①

# 22 유리함수

**유제** 본문 148~150쪽

**1.** ㄱ, ㄷ, ㄹ **2.** (1) $\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

**3.** (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$

(3) $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$ **4.** 풀이 참조 **5.** 풀이 참조

**6.** 6

**1** ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ은 모두 유리식이지만 ㄴ은 분모가 0이 아닌 상수이므로 다항식이다.

따라서 다항식이 아닌 유리식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

**2** (1) $\frac{x-1}{x^2-x-2}+\frac{1}{x-2}$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}+\frac{1}{x-2}$$
$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$$

(2) $\frac{x+2}{x^2-2x-3}\times\frac{x-3}{x^2-4}$

$$=\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x-3}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

답 (1) $\frac{2x}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

**3** (1) 함수 $y=\frac{x+1}{2}$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

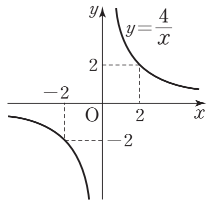
(2) 함수 $y=\frac{1}{x-3}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$이다.

(3) 함수 $y=\frac{x+1}{2x+1}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$ 이다.

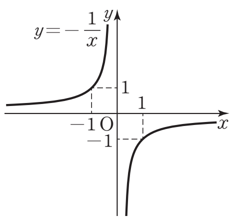
답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$ (3) $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

**4** (1) 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프는 그림과 같고, 점근선은 $x$축,

$y$축이므로 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

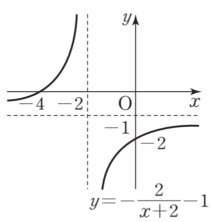



(2) 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프는 그림과 같고, 점근선은 $x$축, $y$축이므로 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

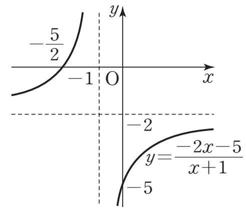



답 풀이 참조

**5** (1) 함수 $y=-\frac{2}{x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 그래프는 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이다.




(2) $y=\frac{-2x-5}{x+1}=\frac{-2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}-2$
이므로 함수 $y=\frac{-2x-5}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 그래프는 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-2$이다.




답 풀이 참조

**6** 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 함수식은
$y-3=\frac{a}{x-1}$, 즉 $y=\frac{a}{x-1}+3$이다.
이때 점 $(3, a)$가 함수 $y=\frac{a}{x-1}+3$의 그래프 위의 점이므로
$a=\frac{a}{3-1}+3$에서 $\frac{a}{2}=3$
$a=6$

답 6

## 기본 핵심 문제

본문 151쪽

01 ① 02 ① 03 ⑤ 04 ① 05 ②

**01** $(A+B)\div C$

$$=\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x^2-x-6}\right)\div\frac{x^2-9}{x+2}$$

$$=\left\{\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+2)(x-3)}\right\}\times\frac{x+2}{x^2-9}$$

$$=\left\{\frac{x+2}{(x+2)(x-3)}+\frac{1}{(x+2)(x-3)}\right\}\times\frac{x+2}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{x+3}{(x+2)(x-3)}\times\frac{x+2}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)^2}$$

답 ①

**02** 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 점 $(2,\ 6)$을 지나므로

$6=\frac{a}{2}$에서 $a=12$

함수 $y=\frac{12}{x}$의 그래프가 점 $(3,\ b)$를 지나므로

$b=\frac{12}{3}=4$

따라서 $a+b=12+4=16$

답 ①

**03** 함수 $y=\frac{6}{x-1}-1$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 함수식은

$y-3=\frac{6}{(x+2)-1}-1$에서 $y=\frac{6}{x+1}+2$

함수 $y=\frac{6}{x+1}+2$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=2$이므로 $a=-1,\ b=2$

그러므로 함수 $y=\frac{6}{x-1}-1$의 그래프와 직선

$y=(-1)+2=1$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{6}{x-1}-1=1$에서 $\frac{6}{x-1}=2$

따라서 $x-1=3$에서 $x=4$

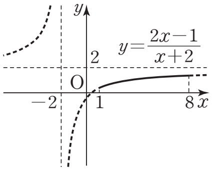
답 ⑤

**04** $y=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-5}{x+2}=-\frac{5}{x+2}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

그러므로 함수 $y=\frac{2x-1}{x+2}$의 그래프는 그림과 같고

$x=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{3}$, $x=8$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.




따라서 $M=\frac{3}{2},\ m=\frac{1}{3}$이므로

$M\times m=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

답 ①

**05** 함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 함수식은

$y=\frac{5}{x-a}+2=\frac{2(x-a)+5}{x-a}=\frac{2x+(5-2a)}{x-a}$

이므로

$\frac{2x+(5-2a)}{x-a}=\frac{bx+c}{x-3}$

에서 $a=3,\ b=2$이고 $c=5-2a=5-6=-1$

따라서 $a+b+c=3+2+(-1)=4$

답 ②

# 23 무리함수

**유제** 본문 152~154쪽

**1.** (1) $x \geq -4$ (2) $x < 6$ **2.** $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$

**3.** 풀이 참조 **4.** 풀이 참조 **5.** 풀이 참조 **6.** 8

**1** (1) $\sqrt{x+4}$의 값이 실수가 되려면

$x+4 \geq 0$에서 $x \geq -4$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$의 값이 실수가 되려면

$6-x>0$에서 $x<6$

답 (1) $x \geq -4$ (2) $x<6$

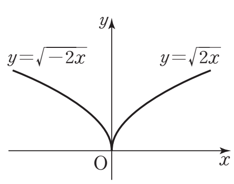
**2**

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})}+\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}}{(x+3)-(x-1)}+\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}{(x+3)-(x-1)}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})}{4}$$
$$=\frac{2\sqrt{x+3}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$$

답 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$

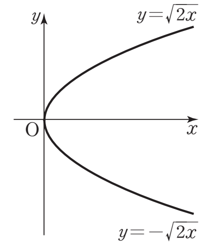
**3** (1) 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



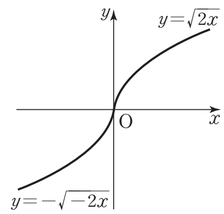

(2) 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.



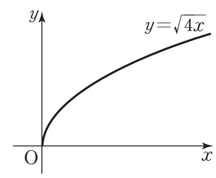

(3) 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.

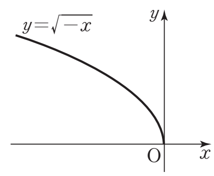



답 풀이 참조

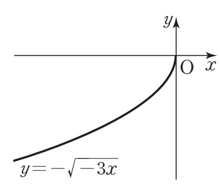
**4** (1) 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프는 그림과 같고 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.




(2) 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 그림과 같고 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.

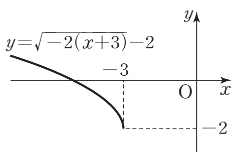



(3) 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프는 그림과 같고 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.

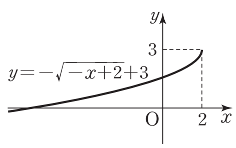



답 풀이 참조

**5** (1) 무리함수 $y=\sqrt{-2(x+3)}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 그림과 같고,
정의역은 $\{x\,|\,x\le -3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이다.




(2) $y=-\sqrt{-x+2}+3=-\sqrt{-(x-2)}+3$이므로
무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 그림과 같고,
정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le 3\}$이다.




답 풀이 참조

**6** 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 그래프의 함수식은
$y=\sqrt{a(x+2)}-4$
이 그래프가 원점을 지나므로
$0=\sqrt{a(0+2)}-4$에서 $\sqrt{2a}=4$, $2a=16$
따라서 $a=8$

답 8

## 기본 핵심 문제

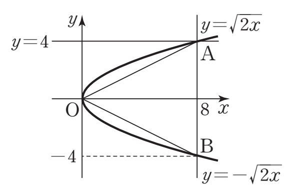
본문 155쪽

**01** ③ **02** ⑤ **03** ⑤ **04** ① **05** ③

**01** $\sqrt{-x^2+x+20}$의 값이 실수가 되려면
$-x^2+x+20\ge 0$에서
$x^2-x-20\le 0$
$(x+4)(x-5)\le 0$
$-4\le x\le 5$ ⋯⋯ ㉠
$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$의 값이 실수가 되려면
$x+1>0$에서 $x>-1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $-1<x\le 5$
따라서 $\sqrt{-x^2+x+20}$과 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$의 값이 모두 실수가 되도록 하는 정수는 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 그 개수는 6이다.

답 ③

**02**




함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점 A의 $x$좌표를 $a$라 하면
$\sqrt{2a}=4$에서 $2a=16$, $a=8$
점 A의 좌표가 $(8,\ 4)$이므로 점 A를 지나고 $y$축과 평행한 직선의 방정식은 $x=8$이고
이 직선이 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프와 만나는 점의 $y$좌표를 $b$라 하면
$b=-\sqrt{2\times 8}=-4$
그러므로 점 B의 좌표는 $(8,\ -4)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 8\times 8=32$

답 ⑤

**03** 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 그래프의 함수식은
$y=\sqrt{-2(x-2)}-4$

함수 $y=\sqrt{-2(x-2)}-4$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 $a$라 하면

$0=\sqrt{-2(a-2)}-4$에서 $\sqrt{-2(a-2)}=4$

$-2(a-2)=16$

$a-2=-8$

$a=-6$이므로 점 A의 좌표는 $(-6,\ 0)$

함수 $y=\sqrt{-2(x-2)}-4$의 그래프가 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표를 $b$라 하면

$b=\sqrt{-2(0-2)}-4$

$\ \ =2-4=-2$

이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ -2)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{\{0-(-6)\}^2+(-2-0)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

답 ⑤

**04** $y=\sqrt{3x-6}+3=\sqrt{3(x-2)}+3$이므로

함수 $y=\sqrt{3x-6}+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq 3\}$이고, $a=2$, $b=3$이다.

따라서 직선 $x=5$가 함수 $y=\sqrt{3x-6}+3$의 그래프와 만나는 점의 $y$좌표는

$\sqrt{3\times5-6}+3=\sqrt{9}+3=6$

답 ①

**05** 함수 $y=\sqrt{2x+7}+a$의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\geq-\frac{7}{2}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq a\}$이다.

함수 $y=\sqrt{2x+7}+a$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 $f(0)<0$이어야 한다.

이때 $f(0)=a+\sqrt{7}$이므로 $a+\sqrt{7}<0$에서 $a<-\sqrt{7}$

따라서 함수 $y=\sqrt{2x+7}+a$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 정수 $a$의 최댓값은 $-3$이다.

답 ③

## 단원 종합 문제

본문 156~158쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ③ | 03 ④ | 04 ⑤ | 05 ④ |
| 06 ⑤ | 07 6 | 08 ② | 09 ⑤ | 10 ④ |
| 11 ③ | 12 ④ | 13 ① | 14 ③ | 15 ① |

**01** 집합 $X$의 각 원소가 집합 $Y$의 두 원소 중 하나의 원소에 대응해야 하므로 집합 $X$에서 집합 $Y$로의 함수 $f$의 개수는 $2\times2\times2=8$

이때 함수 $f$의 공역과 치역이 서로 같으려면

치역이 $\{1\}$이거나 $\{2\}$이면 안 된다.

함수 $f$의 치역이 $\{1\}$인 함수 $f$의 개수는 1이고,

함수 $f$의 치역이 $\{2\}$인 함수 $f$의 개수도 1이므로

구하는 함수 $f$의 개수는

$8-1-1=6$

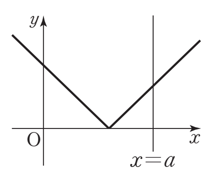
답 ③

**02** 함수의 그래프는 함수의 정의역의 모든 원소 $a$에 대하여 $y$축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서만 만나야 한다.

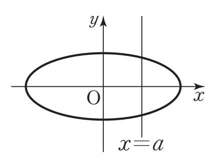
즉, 직선 $x=a$와 두 점 이상에서 만나는 것은 함수의 그래프가 아니다.

따라서 직선 $x=a$와 한 점에서만 만나는 ㄱ, ㄹ은 함수의 그래프이고, $x=a$와 두 점에서 만나는 ㄴ, ㄷ은 함수의 그래프가 아니다.

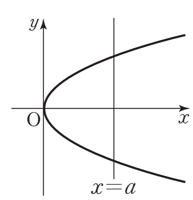
ㄱ.



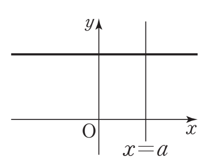

ㄴ.




ㄷ.




ㄹ.




답 ③

**03** $f(a)$가 짝수이므로 $f(a)=4$ 또는 $f(a)=6$이고

$f(b)$가 3의 배수이므로 $f(b)=3$ 또는 $f(b)=6$

이때 함수 $f$가 일대일함수이므로 $f(a)$의 값과 $f(b)$의 값이 동시에 6일 수 없다.

그러므로 함수 $f$의 치역의 모든 원소의 합이 최대이려면 $f(a)=4$, $f(b)=6$이어야 한다.

또한 $f(c)$의 값은 4도 아니고 6도 아니므로 함수 $f$의 치역의 모든 원소의 합이 최대이려면 $f(c)=7$이어야 한다.

따라서 함수 $f$의 치역의 모든 원소의 합이 최대이려면 치역은 $\{4, 6, 7\}$이어야 하고 그 합은

$4+6+7=17$

답 ④

**04** 집합 $X=\{-2, 3\}$에서 집합 $Y=\{a, b\}$로의 함수

$f(x)=x^2$에서

$f(-2)=(-2)^2=4$

$f(3)=3^2=9$

이므로 $a=4$, $b=9$

집합 $X=\{-2, 3\}$에서 집합 $Y=\{a, b\}$로의 함수 $g(x)=cx+d$에 대하여 함수 $g(x)=cx+d$는 일대일대응이지만 $f\neq g$이므로 $g(-2)=9$, $g(3)=4$이어야 한다.

$g(-2)=-2c+d=9$ …… ㉠

$g(3)=3c+d=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=-1$, $d=7$

따라서 $a+b+c+d=4+9+(-1)+7=19$

답 ⑤

**05** $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2+2x+3$이므로

$g(7)$의 값을 구하기 위하여 $f(a)=7$을 만족시키는 상수 $a$의 값을 먼저 구하면

$f(a)=3a-2=7$에서 $a=3$

그러므로 $(g\circ f)(x)=x^2+2x+3$의 양변에 $x=3$을 대입하면 좌변은

$$\begin{aligned}(g\circ f)(3)&=g(f(3))\\&=g(7)\end{aligned}$$

이고, 우변은 $3^2+2\times3+3=18$

따라서 $g(7)=18$

답 ④

**06** $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ h))(1)&=((f\circ g)\circ h)(1)\\&=(f\circ g)(h(1))\\&=(f\circ g)(2)\\&=4\end{aligned}$$

또한 $((h\circ f)\circ g)(x)=(h\circ(f\circ g))(x)$이므로

$$\begin{aligned}((h\circ f)\circ g)(4)&=(h\circ(f\circ g))(4)\\&=h((f\circ g)(4))\\&=h(2)\\&=3\end{aligned}$$

따라서

$(f\circ(g\circ h))(1)+((h\circ f)\circ g)(4)=4+3=7$

답 ⑤

**07** 함수 $f$의 역함수가 존재하므로 함수 $f$는 일대일대응이다.

그러므로 $f(1)+f(2)=4$에서

$f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$

이때 $f(1)=1$, $f(2)=3$이면 $f(1)+f(3)=7$을 만족할 수 없다.

그러므로 $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$이고 $f(4)=2$

$f(4)=2$에서 $f^{-1}(2)=4$

$f(1)=3$에서 $f^{-1}(3)=1$

$f(2)=1$에서 $f^{-1}(1)=2$

따라서

$$\begin{aligned}f^{-1}(2)+(f^{-1}\circ f^{-1})(3)&=f^{-1}(2)+f^{-1}(f^{-1}(3))\\&=4+f^{-1}(1)\\&=4+2\\&=6\end{aligned}$$

답 6

**08** 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(7, 4)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(4, 7)$을 지난다.

즉, $f(1)=1$, $f(4)=7$이므로

$f(1)=a+b=1$ …… ㉠

$f(4)=16a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{3}{5}$

그러므로 $f(x)=\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같으므로

$\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}=x$에서

$2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

두 교점의 좌표가 $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로

두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

**09** $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{2x+3}$

$=\frac{a(2x+3)}{(x-1)(2x+3)}+\frac{b(x-1)}{(x-1)(2x+3)}$

$=\frac{2ax+3a+bx-b}{(x-1)(2x+3)}$

$=\frac{(2a+b)x+(3a-b)}{2x^2+x-3}$

이므로

$\frac{7x+3}{2x^2+x-3}=\frac{(2a+b)x+(3a-b)}{2x^2+x-3}$에서

$2a+b=7$ …… ㉠

$3a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

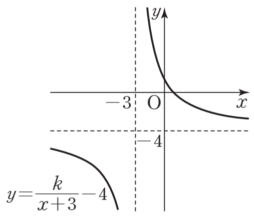
답 ⑤

**10** 함수 $y=\frac{k}{x+3}-4$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-3$, $y=-4$

이고, $k$가 자연수이므로 함수 $y=\frac{k}{x+3}-4$의 그래프는

그림과 같다.




그러므로 함수 $y=\frac{k}{x+3}-4$의 그래프가 제1사분면을

지나려면 $f(0)>0$이어야 한다.

$f(0)=\frac{k}{3}-4>0$에서 $\frac{k}{3}>4$, $k>12$

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 13이다.

답 ④

**11** 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(2, 3)$이므로 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=3$이다.

그러므로 $p=2$, $q=3$이고, $y=\frac{k}{x-2}+3$이다.

함수 $y=\frac{k}{x-2}+3$의 그래프가 두 점 $(3, a)$, $(4, 2a)$를 지나므로

$a=\frac{k}{3-2}+3$에서

$a=k+3$ …… ㉠

$2a=\frac{k}{4-2}+3$에서

$2a=\frac{k}{2}+3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $k=-2$

따라서 $a+k=1+(-2)=-1$

답 ③

**12** $y=\frac{4x-12}{x-6}=\frac{4(x-6)+12}{x-6}=\frac{12}{x-6}+4$

함수 $y=\frac{12}{x-6}+4$의 그래프가 $x$축과 만나는 점 A의 $x$좌표를 $a$라 하면

$0=\frac{12}{a-6}+4$에서 $a-6=-3$, $a=3$

함수 $y=\frac{12}{x-6}+4$의 그래프가 $y$축과 만나는 점 B의 $y$좌표를 $b$라 하면

$b=\frac{12}{0-6}+4$에서 $b=2$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(3, 0)$, $(0, 2)$이다.

함수 $y=\frac{12}{x-6}+4$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=4$이므로 두 점근선이 만나는 점 C의 좌표는 $(6, 4)$이다.

따라서

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$=\{(6-3)^2+(4-0)^2\}+\{(6-0)^2+(4-2)^2\}$

$=25+40$

$=65$

답 ④

**13** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(x+2)-x}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$

이므로

$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$

$=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

답 ①

**14** 정의역이 $\{x|-2\leq x\leq 10\}$인 함수

$f(x)=\sqrt{2x+5}+a$는

$x=-2$일 때 최솟값 $\sqrt{2\times(-2)+5}+a=a+1$을 갖고,

$x=10$일 때 최댓값 $\sqrt{2\times10+5}+a=a+5$를 갖는다.

최댓값과 최솟값의 합이 10이므로

$(a+1)+(a+5)=10$에서

$2a+6=10$, $a=2$

따라서 $f(x)=\sqrt{2x+5}+2$이고

$f(a)=f(2)=\sqrt{2\times2+5}+2=3+2=5$

답 ③

**15** $g(5)=\sqrt{15+1}+a=a+4$

이므로

$(f\circ g)(5)=f(g(5))$

$=f(a+4)$

$=\dfrac{2(a+4)+a}{(a+4)-1}$

$=\dfrac{3a+8}{a+3}$

$\dfrac{3a+8}{a+3}=4$에서 $3a+8=4a+12$, $a=-4$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{3x+1}-4$이고

$f(3)=\dfrac{2\times3-4}{3-1}=1$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))$

$=g(1)$

$=\sqrt{3+1}-4$

$=2-4=-2$

답 ①

## 서술형 유제

본문 159쪽

**출제의도**

역함수의 성질을 알고, 합성함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

역함수의 성질에 의하여

$(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f$이므로

$(f^{-1}\circ g^{-1})(11)=a$에서 $(g\circ f)(a)=11$ ……… ❶

이때

$(g\circ f)(a)=g(f(a))$

$=g(a^2-2)$

$=2a^2-4-a=11$

이므로

$2a^2-a-15=0$

$(2a+5)(a-3)=0$

$a=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$ ……… ❷

따라서 $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x-3$이므로

$(f\circ g)(3)=f(g(3))$

$=f(3)$

$=7$ ……… ❸

답 7

| | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| ❶ | 역함수의 성질을 이용하여 식을 변형한 경우 | 30% |
| ❷ | 양수 $a$의 값을 구한 경우 | 40% |
| ❸ | $f(x)$, $g(x)$를 구하고 $(f\circ g)(a)$의 값을 구한 경우 | 30% |

MEMO